

改进背景值的非等间距 GM (1, 1)模型预测用水量

王园园¹, 刘遂庆¹, 卫东²

(1 同济大学 环境科学与工程学院, 上海 200092 2 中国市政工程华北设计研究院,
天津 300074)

摘要: 考虑到在工程实际中用水资料可能有所缺失或因某些数据异常而造成数据列的不等间距, 构造了非等间距 GM (1, 1)模型, 并对其背景值进行改进。结果表明, 改进背景值后非等间距 GM (1, 1)模型的预测精度大大提高, 用其预测城市用水量是合理可行的。

关键词: 非等间距 GM (1, 1)模型; 城市用水量; 预测; 背景值

中图分类号: TU991 文献标识码: C 文章编号: 1000-4602(2009)17-0057-03

Application of Non-equidistance GM (1, 1) Model with Improved Background Value in Predicting Water Demands

WANG Yuan-yuan¹, LIU Suqing¹, WEI Dong²

(1 College of Environmental Science and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092
China; 2 North China Municipal Engineering Design and Research Institute, Tianjin 300074
China)

Abstract Considering the possible missing in water demand data and the non-equidistance of data series caused by data abnormality, the non-equidistance GM (1, 1) model was established and its background value was improved. The results show that the prediction accuracy of non-equidistance GM (1, 1) model with improved background values is greatly improved and it is reasonable and feasible to predict the urban water demands by the model.

Key words non-equidistance GM (1, 1) model; urban water demands; prediction; background value

近年来灰色理论被广泛用于用水量的预测, 但是其预测精度还有很大提高空间^[1~4]。对传统 GM (1, 1)模型进行背景值的改进, 可大大提高其预测精度^[5~7]。考虑到在工程实际中用水资料可能有所缺失或因某些数据异常而造成数据列的不等间距, 笔者构造了非等间距 GM (1, 1)模型, 并对其背景值进行改进, 以此来预测用水量的预测, 同时对背景值改进前、后的 GM (1, 1)模型的预测精度进行了比较。

1 方法原理

1.1 非等间距 GM (1, 1)模型的建立

设原始数据列为 $x^{(0)} = \{x^{(0)}(k_1), x^{(0)}(k_2), \dots,$

$x^{(0)}(k_n)\}$, 首先对其进行一次累加生成序列 $x^{(1)} = \{x^{(1)}(k_1), x^{(1)}(k_2), \dots, x^{(1)}(k_n)\}$, 然后根据式 (1) 对 $x^{(1)}$ 进行计算可生成新的序列。

$$z^{(1)}(k_i) = \frac{1}{2} \{x^{(1)}(k_i) + x^{(1)}(k_{i-1})\} \quad (1)$$

式中 $z^{(1)}(k_i)$ ——背景值, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

式 (1) 即为背景值的传统计算方法。

对累加生成序列 $x^{(1)}$ 建立白化微分方程^[6], 见公式 (2)。

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = u \quad (2)$$

对式 (2) 进行求解并规定 $t = k_1$ 时有 $x^{(1)}(k_1)$

$=x^{(0)}(k_i)$ ，从而得到非等间距 GM (1, 1)模型，见公式 (3)。

$$\hat{x}^{(0)}(k_i) = [\hat{x}^{(1)}(k_i) - \hat{x}^{(1)}(k_{i-1})] / (k_i - k_{i-1}) \tag{3}$$

1.2 改进背景值

非等间距 GM (1, 1)模型的拟合和预测精度取决于常数 a 和 u ，而常数 a 和 u 的求解依赖于背景值 $z^{(1)}(k_i)$ 的构造形式，因此背景值 $z^{(1)}(k_i)$ 成为直接影响 GM (1, 1)模型精度和适应性的关键因素^[7]。对 $[k_i, k_{i+1}]$ 区间上背景值 $z^{(1)}(k_{i+1})$ 的计算方法进行改进，见公式 (4)。

$$z^{(1)}(k_{i+1}) = \frac{x^{(1)}(k_{i+1}) - x^{(1)}(k_i)}{\ln x^{(1)}(k_{i+1}) - \ln x^{(1)}(k_i)} \tag{4}$$

1.3 自适应 GM (1, 1)模型

自适应 GM (1, 1)模型又被称为等维灰数递补 GM (1, 1)模型，是一种新陈代谢模型。在预测过程中，随着系统的发展，模型中原有数据的信息意义将逐步降低，在补充新信息的同时及时去掉原有数据，不断进行新陈代谢，逐年预测，依次递补，直到完成预测目标为止^[8,9]。

具体建模步骤如下：

- ① 建立原始数列式的 GM (1, 1)模型，并对其精度进行检验。
- ② 利用 GM (1, 1)模型预测最近的一个数据 $x^{(0)}(n+1)$ 。
- ③ 将 $x^{(0)}(n+1)$ 作为新的信息添加到原数列中，同时去掉第一个数据 $x^{(0)}(1)$ ，构成新的数列 $X^{(0)} = [x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n-1), x^{(0)}(n), x^{(0)}(n+1)]$ ，上式数列的长度不变，即保持数列等维。
- ④ 利用新数列式重新建立 GM (1, 1)模型，并对模型参数 a, u 进行修正，对其精度进行检验，然后转步骤 ②。重复此过程，直到完成预测。

1.4 模型精度的检验

预测值的残差 $q = x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t)$ 、预测值的误差 $p = q/x^{(0)}(t)$ ，通常预测精度 $\geq 85\%$ 时可认为预测是成功的。

当使用平均绝对百分比误差检验模型精度时，预测值精度的计算公式见式 (5)，预测值精度的分级见表 1。

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |p_i| \tag{5}$$

式中 n ——样本数据的个数

p_i ——相对百分比误差，%

表 1 预测值精度分级

Tab 1 Precision grade of predictive value

MAPE /%	预测等级	MAPE /%	预测等级
< 10	高精度预测	20~ 50	可行的预测
10~ 20	好的预测	> 50	不可行的预测

1.5 程序设计

按照图 1 中的流程编写程序，用改进背景值的非等间距 GM (1, 1)模型进行用水量预测。

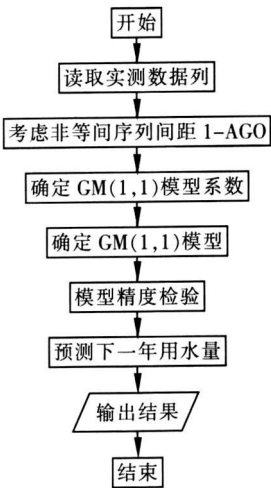


图 1 程序流程

Fig. 1 Flow chart of program

2 应用实例

C 市 1996 年—2006 年的城市用水总量见表 2。

表 2 C 市 1996 年—2006 年的城市用水总量

Tab 2 Total water consumption of C city from 1996 to

	2006	10 ⁴ m ³
年份	实际用水量	
1996	84 548	
1997	83 168	
1998	72 218	
1999	71 932	
2000	70 722	
2001	73 118	
2002	69 704	
2003	79 935	
2004	81 061	
2005	80 465	
2006	86 142	

① 假设因故缺失 1997 年、1998 年和 1999 年的用水量数据，则原序列变成非等间距序列。利用缺失数据后的非等间距序列建立改进背景值的非等间距 GM (1, 1)模型进行预测，经过计算机求解得到

参数 $a = -0.017731$, $u = 66.1921$, 其预测模型见式 (6)、(7), 预测结果见表 3、4

$$\hat{Q}^{(1)}(t_{i+1}) = 3.817668e^{0.017731t_i} - 3.733130 \tag{6}$$

$$\hat{Q}^{(0)}(t_i) = [\hat{x}^{(1)}(t_i) - \hat{x}^{(1)}(t_{i-1})] / \Delta t_i \tag{7}$$

表 3 改进背景值后 GM (1, 1)模型的预测结果

Tab 3 Prediction results by GM (1, 1) model with improved background value

年份	实际用水量 /10 ⁴ m ³	预测用水量 /10 ⁴ m ³	残差 q_i / 10 ⁴ m ³	误差 p_i / %
1996	84.548	84.548	0	0
2000	70.722	70.141.9	580.1	0.8
2001	73.118	73.306.3	-188.3	-0.3
2002	69.704	74.617.5	-4913.5	-7.0
2003	79.935	75.952.2	3982.75	4.9

表 4 数据缺失年份的用水量预测结果

Tab 4 Prediction results of years losing the data

年份	实际用水量 /10 ⁴ m ³	预测用水量 /10 ⁴ m ³	残差 q_i / 10 ⁴ m ³	误差 p_i / %
1997	83.168	68.287.7	14880.3	21.8
1998	72.218	68.898.5	3319.5	4.6
1999	71.932	69.516.5	2415.5	3.4

由式 (5) 计算得到年用水量预测值的 MAPE = 2.6%、缺失年份用水量预测值的 MAPE = 9.9%, 均为高精度预测; 采用未改进背景值的传统 GM (1, 1) 模型进行用水量预测时, 年用水量预测值的 MAPE = 2.7% (高精度预测)、缺失年份用水量预测值的 MAPE = 11.1% (好的预测)。可见, 改进背景值后模型的预测精度比改进前提升了一个等级。

② 采用改进背景值的 GM (1, 1) 模型预测 2004 年—2006 年的用水量, 结果见表 5。

表 5 改进背景值后 GM (1, 1)模型的预测结果

Tab 5 Prediction results by GM (1, 1) model with improved background value

年份	实际用水量 /10 ⁴ m ³	预测用水量 /10 ⁴ m ³	残差 q_i / 10 ⁴ m ³	误差 p_i / %
2004	81.061	77.310.8	3750.2	4.6
2005	80.465	80.887.7	-422.7	0.5
2006	86.142	84.886.8	1255.2	1.5

由表 5 可知, 2004 年、2005 年、2006 年用水量的预测误差分别为 4.6%、0.5% 和 1.5%, 预测精度很高; 当采用未改进背景值的 GM (1, 1) 模型进行用水量预测时, 其预测误差分别为 4.7%、1.1% 和 5.1%。由此可见, 改进背景值后模型的预测精度得到很大提高。

3 结论

采用改进背景值的非等间距 GM (1, 1) 模型预测 C 市的城市用水量, 其预测精度较传统 GM (1, 1) 模型的高。可见, 改进非等间距 GM (1, 1) 模型的背景值可大大提高其预测精度。

参考文献:

[1] 陈民利, 高金良, 李坤, 等. 灰色模型在城市月用水量预测中的应用 [J]. 哈尔滨商业大学学报: 自然科学版, 2005, 21(6): 721-723

[2] 张雅君, 刘全胜. 需水量预测方法的评析与择优 [J]. 中国给水排水, 2001, 17(7): 27-29

[3] 李红艳, 崔建国, 张星全. 城市用水量预测模型的优选研究 [J]. 中国给水排水, 2004, 20(2): 41-42

[4] 张雅君, 刘全胜. 城市需水量灰色预测的探讨 [J]. 中国给水排水, 2002, 18(3): 79-81

[5] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型 GM (1, 1) 优化 [J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50-53

[6] 李玮. 非等间距 GM (1, 1) 组合预测模型 [J]. 陕西理工学院学报: 自然科学版, 2007, 23(3): 71-74

[7] 王钟美, 吴春笃. GM (1, 1) 改进模型及其应用 [J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(9): 20-25

[8] 高传昌, 刘新阳. 等维灰数递补动态模型在城市生活用水量预测中的应用 [J]. 灌溉排水学报, 2005, 24(6): 71-73

[9] 李雁, 岑慧贤. 等维灰数递补动态模型在生活垃圾产生量预测中的应用 [J]. 环境污染与防治, 2001, 23(1): 42-44

电话: 13681710393
E-mail jinzhao1225@163.com
收稿日期: 2009-03-01