

用线性规划法进行环状配水管网的优化设计

航空工业规划设计研究院 范懋功编译

线性规划法进行环状配水管网的优化设计是一种简便实用的优化方法。本文根据1987年美国出版的“给水排水系统模型设计”一书,介绍用线性规划法进行环状配水管网优化设计时的数学模型、分配流量的方法和在各种情况下的目标函数和约束条件等内容。

一、配水管造价的计算式

$$\text{配水管造价} \quad C = f(D) l \quad (1)$$

式中: C —管价, 元;

D —管径, m ;

l —管长, m 。

$$D = K \frac{Q^{0.4}}{S^{0.2}} \quad (2)$$

式中: K —与管壁粗糙系数有关的常数;

Q —管线流量, m^3/s ;

S —水力坡度。

$$\text{配水系统总造价} \quad C_T = \sum_i f_l (K \frac{Q_i^{0.4}}{S_i^{0.2}}) l_i \rightarrow \min \quad (3)$$

式中: C_T —系统总造价, 元;

D 的函数是目标函数的一部分, 目标函数对于 Q 是凹函数, 对于 S 是凸函数。由于标准管径的关系, 费用函数不是连续而是离散的。

二、配水系统的三个主要约束条件

1. 节点 n 的流量连续方程

$$\sum_{i \in B_n} Q_i - \sum_{i \in A_n} Q_i = q_n, \quad Q_i \geq 0 \quad (4)$$

式中: Q_i —管 i 流量的 m^3/h ;

A_n —节点 n 出流管集合;

q_n —节点 n 用水量, m^3/s ;

B_n —节点 n 入流管集合。

2. 节点 n 保持最小服务水压

$$\sum_{i \in I_n} S_i l_i \leq h_s - h_n + Z_n - Z_n \quad (5)$$

式中: S —水力坡度, l —管长, m ; h_s —水源点压头, m ;
 h_m —最小服务水压, m ; Z_n —节点地面标高, m ; Z_s —水源点地面标高, m 。

配水系统不用水时, 静压最大。节点 n 的最大压力约束条件

$$h_s \leq h_m + Z_n - Z_s \quad (6) \quad \text{式中: } h_m \text{—容许最大水压, } m。$$

3. 环约束条件

$$\sum_{i \in I_r} S_i l_i = 0 \quad (7)$$

式中: I_r —环 r 的管线集合

关于最大、最小流速的约束条件, 在设计数学模型中的候选管径集合时, 隐函数内已含此约束条件。

所有约束条件都是线性的, 可行点集合是凸集。

三、候选管径

线性规划法在数学模型中采用标准管径, 两个节点间单独管段的候选管径定义如下:

1. 现有的标准管径

2. 设计流量的流速保持在最小、最大流速之间

$$\left(\frac{4 \cdot q_M}{\pi \cdot V_M} \right)^{\frac{1}{2}} \leq D_i \leq \left(\frac{4 \cdot q_m}{\pi \cdot V_m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

式中: D_i —管 i 的候选直径, m ;

q_M 、 q_m —管网在多负荷条件下管 i 中的最小和最大流量;

V_M 、 V_m —管 i 中的最小、最大流速。适当选择候选管径, 保持最大和最小流速。

四、数学模型的建立

1. 枝状管网模型的建立

假定管线由几段不同直径的管段串联组成, 设计流量不变, 每种直径管段的水力坡度亦为一常数, 这样水头损失仅与管段长度有关。整个管线的水头损失

$$h_{Li} = \sum_{j \in J_i} S_j L_j \quad (9)$$

式中: h_{Li} —管线 i 的水头损失,

S_j —管段 j 的水力坡度,

L_j —管段 j 的长度,

J_i —管线 i 的管段集合。

上式受到下列条件的约束

$$\sum_{j \in J_i} L_j = l_i \quad (10)$$

式中: l_i —管线*i*的长度。

$$\text{造价函数} \quad C_i = \sum_{j \in I_i} C_j L_j \quad (11)$$

式中: C_i —管线的造价, 元;

C_j —管段直径为*j*的造价, 元/m。

此造价函数亦受长度条件的约束。

设计模型的目标是找到管径最适宜的组合使整个系统的造价最低, 同时符合设计准则和约束条件。能以数学式表达的主要约束条件是最低水压约束条件, 就是说没有一个节点的水压低于用户水压。最大水压和流速约束条件不作为模型的一部分直接表示。最大水压通常以作用静水头校核, 即水源静压与管网中任意一点的地面高程之差产生的静水头。

限制管网任何控制点*n*与水源之间的水头损失的方程式为:

$$\sum_{j \in J_n} S_j L_j \leq h_s - h_m + Z_s - Z_n \quad (12)$$

式中: S_j —管段*j*的水力坡度; L_j —管段*j*的长度, m; h_s —水源压力水头, m;

h_m —用户最低压力水头, m; Z_s —水源点地面标高, m; Z_n —节点*n*地面标高, m;

J_n —路*n*上的管段集合。

所有控制点都建立上述方程。

系统的全部管线的长度条件

$$\sum_{j \in I_i} L_j = l_i \quad (13)$$

式中: l_i —管线*i*的长度, m。

目标函数包括系统所有管段的造价之和。

$$C_T = \sum_j C_j L_j, \min \quad (14)$$

式中: C_T —系统总造价, 元;

C_j —管段管径*j*的造价, 元/m。

式(12) (13) (14)代表枝状配水系统的优化模型, 所有方程式都是线性。系统的变量为管段长度*L*, 代表系统中管线上某种管径的长度, 水力坡度*S_j*和某种管径造价*C_j*均为常数。

2. 环状管网模型的建立

在开发环状管网的模型时首先假定流量分配为已知。

$$\text{环条件} \quad \sum_{j \in J_r} S_j L_j = 0 \quad (15)$$

式中: S_j —管段*j*的水力坡度;

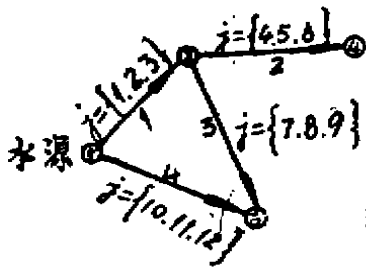
L_j —管段*j*的长度, m;

J_r —环*r*的管段集合。

环状管网的模型包括: (1) 目标函数, 式(14); (2) 全部控制点的最小压力条

件, 式 (12); (3) 环条件, 式 (13), (4) 所有管线的长度条件。此模型为一线性优化模型, 长度 L_i 为系统变量。

以4管线单环的简单例子来说明。假定地形平坦, 两末端节点以系统控制点。设流量分配已定, 每根管线有3种候选管径。每管段的水力坡度 S 可根据流量和假定的候选管径计算。



全部设计模型为:

$$\text{目标函数 } C_T = C_1 L_1 + C_2 L_2 + \dots + C_{12} L_{12} \rightarrow \min$$

$$\text{最小压力条件 } S_1 L_1 + S_2 L_2 + S_3 L_3 + S_4 L_4 + S_5 L_5 + S_6 L_6 \leq h_1 - h_m + Z_1 - Z_4$$

$$S_{10} L_{10} + S_{11} L_{11} + S_{12} L_{12} \leq h_1 - h_m + Z_1 - Z_3$$

$$\text{环条件 } S_1 L_1 + S_2 L_2 + S_3 L_3 + S_7 L_7 + S_8 L_8 + S_9 L_9 - S_{10} L_{10} - S_{11} L_{11} - S_{12} L_{12} = 0$$

$$\text{长度条件 } L_1 + L_2 + L_3 = l_1$$

$$L_4 + L_5 + L_6 = l_2$$

$$L_7 + L_8 + L_9 = l_3$$

$$L_{10} + L_{11} + L_{12} = l_4$$

五、流量分配和最短路法、最小生成树法求干管系统

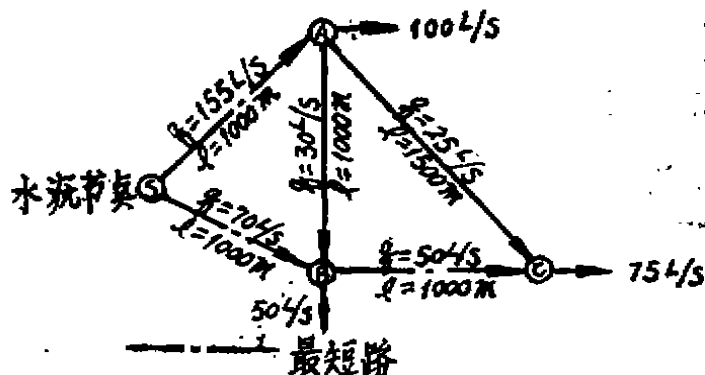
管网优化设计时, 假定分配流量已知, 求模型的最低费用解。优化的结果随流量分配而定。从环状管网中选取一枝状管网作为主要系统, 此系统中的管线称干管, 除此之外, 环状管网中其余的管线称连枝管。由于干管供应节点总流入量的某一百分比, 其余的流入量由进水连枝管等分。管网的所有节点由于干管进水的百分比是相同的。节点由于干管 100% 供水的管网实际上是枝状管网。使环状管网系统费用达到最低有两种情况, 一种情况是流量分配均等, 即由于干管供应 50%, 另一种情况是流量分配很不均等, 90% 由于干管供应。通常先估算分配流量, 然后求解线性规划模型。应当指出, 此方法不保证数学最优, 作为一种试探法考虑。

流量分配的基本假定是把流量集中到一些主要干管, 其余管线分配较小的流量, 流量集中到干管通常是经济的。决定流量分配可分为两个问题: 1. 确定干管枝状系统, 2. 估计连枝管流量。通常采用最小生成树法求干管系统, 或用水源节点和所有用水节点之间的最短路法求得。那一种方法能求得最低费用可能与具体管网的布局有关, 1984 年有人证明, 用最短路法求干管系统可得出较低的费用。

为了确定环系统的流量, 可从安全考虑规定所有连枝管中的最小流量, 剩下的干管系统中的流量可从所有节点的流量连续方程求得。例如以管线中的消防用水量定为最小流量或限止流入节点的干管流量为节点总流入量的某一百分比, 其余的流入量均等地分配到连枝管。连枝管中水流方向根据管线两节点与水源节点的距离确定, 假定离水源点距离近的节点流向远的节点。计算得出的连枝管流速可能会小于最低流速, 此时应加大流量一直到满足流速约束条件为止。用最短路法确定干管系统时, 节点由于干管供应 70% 的用水量。

分配流量的步骤

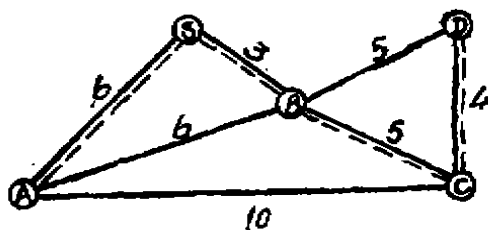
1. 用最短路原则计算干管系统。
2. 确定连枝管流量时可假定一最小流量或设定为节点供水量的某一百分比。
3. 根据连枝管流量和所有节点的连续条件求干管流量。例：



在干管系统最短路中B、C节点的进水量分别为100和75L/S。在连枝管中流量约为节点进水量的 $\frac{1}{4}$ ，则管线AC中的流量为25L/S，BC和AB中的流量分别为50L/S和30L/S，在管线S—A和S—B中的流量分别为155L/S和70L/S。

用最小生成树法求干管系统

最小生成树问题的目标是寻求管网所有节点相互连接的分枝线总长度最小，即管线总长最小的分支配水系统。求解这个问题的算法非常简单，从管网的任一节点开始，最邻近的尚未连接的节点与已连接节点的树相连。例：



图中——表示最小生成树，数字代表长度。从水源节点S开始，B是最邻近的未连接节点。S与B连接后节点C和D是节点B最近的未连接节点，但连接距离相等，选择两节点中的任意一节点，现选择C。下一步连接节点D和A。必须指出，节点B连接节点C还是D，产生2种不同的解，即为B—C—D或B—D—C有相同的距离为9。节点C和D同时与节点B连接将得出长度10，这样就得出错误的结果。

最小生成树求解算法是一个迭代过程，每个迭代的目标是在未连接节点中寻找一个与管网中已连接节点最近的节点，计算步骤如下：

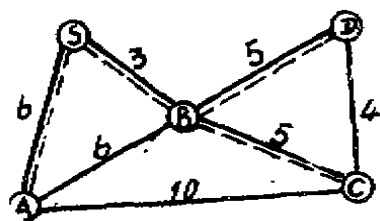
1. 任意选择一节点开始

2. 连接最近的未连接节点，如有几个节点的最小距离相等，只能选择一节点。

用最短路法求干管系统

最短路问题的目标是求找管网中水源点和终点之间的最短连接，例如，配水系统中从水源到用水节点的最短路。求从水源点到管网所有节点的最短路步骤为：从水源点开始逐步进行到最远的节点，每一步在前一步基础上至少扩展一个新的节点，估算最短路。

例：设已经估算与水源点连接的 shortest 的节点叫已连接节点，留下的节点叫未连接节点。从水源开始最近的未连接的节点是B，距离为3，因此到水源的总长度亦为3。连接S—B。已连接的节点S、B分别考虑与最近的未连接节点A、C和D连接，距离分别为6、5和5，与水源的总距离为6、8和8。连接S—A是最短总距离。节点C、D因和B的距离相等而连接。



求解算法是一迭代过程，每次迭代的目的是在未连接节点中求一个与水源最近的节点。

迭代步骤：

1. 列出邻近有未连接节点的已连接节点；
2. 为每个列出的已连接节点选择最邻近的未连接节点。如果有几个节点与同一个已连接节点的最小距离相等，则这些节点都应考虑；
3. 计算选定的每个未连接节点与水源的最小距离；
4. 选择离水源距离最短的节点作为新的已连接节点，如果等距离节点有好几个，这几个节点都连上。

步 序	邻近有未连接节点的已连接节点		最近的未连接节点			
	节 点	点与水源连接的距离	节 点	连接距离	与水源的总距离	新 连 接
1	2	3	4	5	$6 = 3 + 5$	7
1	S	0	B	3	3	B
2	S	0	A	6	6	A
	B	3	C	5	8	—
	B	3	D	5	8	—
3	A	6	C	10	16	—
	B	3	C	5	8	C
	B	3	D	5	8	D

六、管段长度的调整

管段长度是系统的变数，但在数学解中求得的值可能很小，不符合实际。因此需要调整优化计算的结果。可以增长或取消不切实际的管段。调整应尽量使设计的改变最小，因为改变意味着模型的理论优化偏差。分析估计管段调整对水头损失和某一管线造价的影响，管线水头损失的变化是改变管段长度L的结果。

$$\Delta h_{L_i} = (S_1 - S_2) \cdot \Delta L \quad (16)$$

式中， h_{L_i} —管线i水头损失，m；

L—管段长度，m；

S_1 、 S_2 —管段水力坡度。

因此 $\Delta C_i = (C_1 - C_2) \cdot \Delta L$ (17)

式中 C_i —管线*i*造价, 元;

C_1, C_2 —某一管径管段的单位造价, 元/m。

环状管网某一管线中管段长度调整也会影响其他管线的水力条件, 因此在寻求合理调整方法时必须考虑调整对整个系统的影响。第一种方法每条管线有两个管段, 小直径的用大直径的代替, 结果系统的水头损失将减小, 使用户水压大于最低水压。实际增加的造价每个设计不同, 假定40%的管线有两个管段, 这样整个管网管线总长的20%为管径大一级的管代替。如果某一管径管段的单价比直径小一级的管段高40%, 整个管线的造价将增加8%, 一种比较合理的方法, 不是所有的较小管段管径都由大一级的管径代替, 而是某些管线可以用小一级的管径代替较大的。某一管线的减小的水头损失为另一管线增加的水头损失所抵消, 这种方法也能限制水力条件和造价的变化。经验表明, 仔细调整后造价的变化可保持只在1%或2%的范围内。枝状管网同一管线内的某一管段直径被另一直径所代替, 不会不符合流速条件, 因为在枝状管网中直径的改变不会改变流量, 还因为管线直径是候选直径的集合, 两种管径的流速都在容许范围内。在环系统中的流量分配随管径的选择而定, 因此流量分配会受到管段长度调整的影响。调整后可能不符合流速约束条件, 这也是管段长度调整应使水力条件改变最小的原因。

七、加压泵站造价的计算

加压泵站造价的计算式 $C = \alpha_1 + \alpha_2 H$ (18)

式中 C —泵站费用, 元;

H —水泵提供的静水头, m;

α_1 —费用常数, 元;

α_2 —费用系数, 元/m。

当用现值计算规定期限内的总费用时, 变量部分通常为泵站总费用的主要部分, 因此上式第一项常可略去, 泵站的费用与泵静水头成线性关系。

目标函数中加上泵站费用后为:

$$C_T = \sum_{j \in J} C_j L_j + \sum_{j \in P} \alpha_{2j} H_j \rightarrow \min \quad (19)$$

式中 C_T —系统总费用, 元; α_{2j} —费用系数, 元/m; L —管段长度, m;

H —泵提供的静水头, m; J —所有管段的集合; P —泵站的集合。

当和泵站一起有蓄水池时, 泵站造价计算式中应有费用常数一项。如果泵站位置已定, 先估算泵静水头, 把随泵静水头而定的费用变量导入目标函数, 而固定费用可作为一常量在计算结束时加上。

八、多水源系统

当建立多水源管网的设计模型时, 必须解决两个问题: (1) 确定流量分配, (2) 建立线性优化模型。流量分配原则与单水源系统相同, 从所有水源求出最小生成树或最短路径, 每个节点由最近的水源供水。如果某一水源的容量有限, 此水源的供水区域亦因之

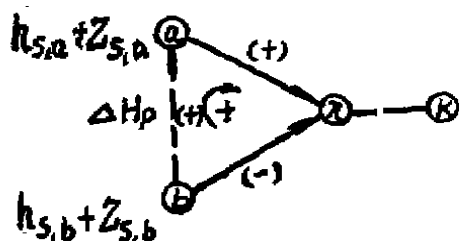
减小。多水源靠水力关系联接,所需条件是:来自不同水源的供水路的所有汇合节点处的测压管水头应相等,条件为:

$$h_{s,a} + Z_{s,a} - \sum_{j \in J_{a,n}} S_j L_j = h_{s,b} + Z_{s,b} - \sum_{j \in J_{b,n}} S_j L_j \quad (20)$$

式中: $h_{s,a}$ 、 $h_{s,b}$ —水源a和b处的压力水头, m;

$Z_{s,a}$ 、 $Z_{s,b}$ —水源a和b处的地面高程, m;

$J_{a,n}$ 、 $J_{b,n}$ —管路a-n和b-n上的管段集合。



两水源的测压管水头差代表两水源间的虚管线的
水头损失, 虚环方程为

$$\sum_{j \in J_{a,n}} S_j L_j - \sum_{j \in J_{b,n}} S_j L_j + h_{s,b} + Z_{s,b} - h_{s,a} - Z_{s,a} = 0 \quad (21)$$

$$\text{或} \quad \sum_{j \in J_{a,n}} S_j L_j - \sum_{j \in J_{b,n}} S_j L_j + \Delta H_p = 0 \quad (22)$$

式中 H_p —测压管水头, m。

九、多种设计状况 (多负荷)

配水系统常按不同的运行状况设计,例如一管网按设计末期需水量设计,但也应满足设计年限初期最小流速要求。另一例是有一水源和地区对置水库的配水系统,管网应满足两种运行状况:(1) 高峰供水时从两处供水,(2) 低水量时向水库供水。

解决问题的方法如下:

1. 分别建立不同状况下设计准则;
2. 每种状况单独进行流量分配;
3. 候选管径同时满足所有状况的流速约束条件;
4. 建立候选管径目标函数的方法与单水源相同,不同状况时的流量和泵的送水头(总扬程)可能不同,在这种情况下泵的送水费用按不同状况单独列入目标函数。
5. 所有状况的水力约束条件单独建立,成为整个模型的约束条件集合。

例:水源节点、用水点和对置水库3点用2条管线连接,2管线分别用3种候选管径和2种候选管径管段低用水量时从水源向水库供水,高峰用水量时,用水节点由水源和水库供水,所有地面高程相等,水库水位的变化假定可以忽略不计。整个设计模型为:

$$\text{目标函数} \quad \sum_{j=1}^5 C_j L_j \rightarrow \min$$

$$\text{约束条件} \quad \sum_{j=1}^3 S_j^1 L_j \leq h_s - h_n$$

$$\sum_{j=1}^3 S_j^1 L_j - \sum_{j=4}^5 S_j^1 L_j = h_s - h_n$$

状况I—高峰用水

(下转第66页)

