维普资讯 http://www.cqvip.com

非稳定状态下活性污泥法无约束条件最优控制的计算方法

彭永臻 王宝贞

（哈尔滨建筑工程学院）

摘 要

本文首先简述了最优控制在动态系统控制中的重要地位，接着以非稳定状态下活性污泥法污水处理系统为研究对象，根据现代控制理论，建立了该处理系统的状态方程、无约束条件下的目标函数与最优控制数学模型。然后，提出了求解该处理系统最优控制数学模型中最优控制变量的计算方法，给出了相应的程序设计。最后通过实例展示了用计算机进行数值计算和绘图的计算过程与结果，进一步说明最优控制在污水处理系统控制中的应用价值。

引 言

本世纪50年代末60年代初，在空间技术发展和电子计算机实用化的推动下，动态系统的优化理论得到了迅速的发展，形成了一个重要的新兴学科分支——最优控制。20多年来，动态系统优化理论不仅有了许多成功的应用，而且已经越出了自动控制的传统界限，在空间技术、系统工程、经济管理与决策等许多领域都有越来越广泛的应用。至今最优控制仍然是一个处于上升阶段的相当活跃的学科。

在任何一个优化问题中都必须有一个“指标”，即我们要求达到最优的目标是什么，这就是经常说的性能指标或称目标函数。目标函数通常依赖于某些参数或某些函数。最优化问题是指如何在允许的范围内选择这些参数值或函数形式，使目标函数最优（一般是取得最大值或最小值）。当目标函数是某些参数的函数时，这样的问题称为静态最优化（Static optimization），简称最优化；当目标函数是某些函数的函数（即所谓泛函）时，相应的最优化问题称为动态最优化（Dynamic optimization）或最优控制（Optimal control）。最优控制是现代控制论中的一个重要组成部分。简单地说，最优控制问题就是在一定条件下，寻求使系统的目标函数为最优的控制规律问题。

虽然最优控制理论在许多领域中不断被开发与应用，然而它在污水处理系统中的研究与应用还远远不够。城市污水或工业废水的水质、水量大都随时间不断地变化，给处理系统的控制与管理带来很多困难，因此，目前城市污水和工业废水处理厂在运行管理中都存在着许多问题。如果污水处理厂能真正实现最优控制，那么不仅能定量地控制出水质量，而且还能使其运行费用尽可能地降

维普资讯 http://www.cqvip.com

低。最优控制能使以计算机为基础的自动控制更加合理。

近年来，出现了许多关于活性污泥法污水处理系统最优化方面的论文，也取得了一些开创性成果。可是，有关污水处理系统最优控制方面的研究仍然极少，尤其是还没有见到以运行费用为目标函数来研究的[1,2]。我们认为，求出使运行费用等目标函数为最小的最优控制应该是这方面研究的最重要的问题之一。因为对于进水的水质、水量不断变化的处理系统来说，采用不同的控制规律，其运行费用是不同的。该费用是每天都需要支付的，所以节省这个费用有很大的实际意义。本文以非稳定状态下的完全混合式活性污泥污法水处理系统作为控制对象，以处理系统需要支付的总费用为目标函数，来研究非稳定状态下如何建立最优控制数学模型以及求解最优控制变量的计算方法。最优控制的计算方法是该领域核心问题之一，也是较复杂的，它已经逐步发展为一个专门学科了。其具体的计算方法除了涉及最优控制的计算理论以外，还取决于特定的动态过程系统及计算机算法，本文着重讨论这一具体的计算方法。

一、处理系统的状态方程与目标函数

一般来说，城市污水与工业废水的水质、水量时刻都在变化，而且其变化幅度可达5倍以上[3]，有些工业废水甚至是间歇排放的。可见，这样的污水处理系统很难维持稳定状态（即进水水质、水量及其它运行参数都不随时间变化的状态）运行。当然，严格地维持稳定状态运行甚至是不可能的，为此而付出的代价也是不必要的。因此，非稳定状态下运行的污水处理系统是普遍存在的，而理想的稳定状态是不存在的。就曝气池中的流态而言，完全混合比推流更容易实现。调查研究表明[4]，实际上不存在理想的推流状态，推流式曝气池中的实际混合状态更接近于完全混合式。此外，还有大量的处理工业废水的完全混合式活性污泥法污水处理厂正在运行。因此本文以进水水质水量不断变化的非稳定状态下完全混合式活性污泥法污水处理系统（以下简称处理系统或系统）为最优控制对象，如图1所示。

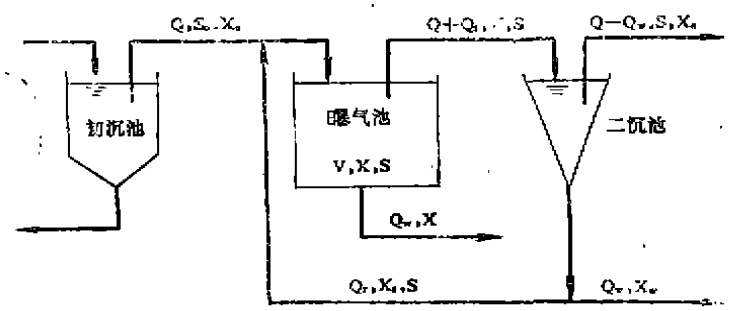


图1 完全混合式活性污泥法处理系统流程

图中：Q——污水流量，简称流量，〔容积〕·〔时间〕$^{-1}$；

S——曝气池与出水中底物浓度，以下简称底物浓度，〔质量〕·〔容积〕$^{-1}$；

X——曝气池中活性污泥（微生物）浓度，以下简称污泥或微生物浓度，以MLVSS表示，〔质量〕·〔容积〕$^{-1}$；

V——曝气池的有效容积，〔容积〕；

角标o、r、w、e——分别表示进水、回流污泥、排放污泥和出水。

图中表示了两种排放污泥的方式，即从污泥回流管线上排放和从曝气池中直接排放。研究结果表明[5]，后者更为合理，因为它有利于对系统进行更有效地控制及其后的污

维普资讯 http://www.cqvip.com

泥浓缩过程。因此，本文以直接从曝气池排放剩余污泥（以下简称排泥）的流程来推导状态方程和进行控制。此外，由于曝气池中的溶解氧浓度一般在2 mg/l左右；水温主要取决于原水温度，在短期内变化不大；为了使二次沉淀池有效地工作，其污泥斗中贮存的污泥量也不应有很大变化。因此，根据上述情况，这里假定曝气池中的溶解氧浓度（简称DO）与温度以及二沉池中贮存的污泥量不变，这些条件对于维持处理系统的正常运转也是必要的[6]。从现代控制论的观点来看，处理系统的控制向量u包括排泥量Q_w（由于X是处理系统的状态变量，它的大小取决于Q_w，并是可以测定的，所以控制变量写成Q_w而没有写成Q_wX，如果从回流污泥管排泥时应写成Q_wX_w），供气量Q_o与回流污泥量Q_r，可表示为[8]：

$$u = [Q_w,\ Q_o,\ Q_r]^T \qquad (1)$$

式中T表示转置。供气量Q_o的大小可以根据维持曝气池中溶解氧浓度不变来调节，它取决于曝气池中的耗氧速率；从下面的物料平衡式（2）来看：

$$Q_rX_r = (Q + Q_r)X \qquad (2)$$

$$Q_r = \frac{QX}{X_r - X} \qquad (3)$$

回流污泥量Q_r的大小也是确定的，它取决于Q、X_r与X（这三者都是已知的或能够测定的）。那么，在控制向量u中，Q_o与Q_r的量可以根据DO、Q、X_r、X等具体数值来控制和调节，不能任意改变，否则曝气池中的DO与二沉池中的污泥量都将改变。由此可见，在控制向量u中，只有排泥量Q_w是还未确定的控制变量[6]。

还应看到，根据污泥龄θ_c（也称固体平均停留时间）的表达式（X_e很小可以忽略）：

$$\theta_c = \frac{XV}{Q_wX + (Q - Q_w)X_e} \approx \frac{V}{Q_w} \qquad (4)$$

污泥龄的控制又必须由控制排泥量来实现。污泥龄是活性污泥法中最重要的参数，排泥量控制就是污泥龄控制。又由于它能控制着污泥浓度X的大小，所以它又与所谓BOD—污泥负荷控制是等价的。

最优控制的第一个基本问题就是必须首先建立状态方程，即描述处理系统动态（非稳定状态）过程的微分方程。为此，仍然沿用公认的比底物利用速率和比污泥（微生物）净增长速率这两个公式[7]：

$$q = \frac{kS}{K_s + S} \qquad (5)$$

$$\mu = yq - K_d \qquad (6)$$

式中，q——比底物利用速率，〔时间〕$^{-1}$；k——最大比底物利用速率，〔时间〕$^{-1}$；K_s——饱和常数，〔质量〕·〔容积〕$^{-1}$；μ——比污泥净增长速率，〔时间〕$^{-1}$；y——产率系数；K_d——污泥自身氧化速率常数，〔时间〕$^{-1}$。完全混合式曝气池中的底物浓度与出水底物浓度相同，一般有$S \ll K_s$，所以式（5）可近似表示为：

$$q = KS \qquad (7)$$

式中K——比底物利用速率常数，〔容积〕·〔质量〕$^{-1}$·〔时间〕$^{-1}$。根据控制理论，进水水质水量和控制变量随时间的变化，必然引起处理系统中状态变量的变化。因此，以时间为自变量，通过对图1所示的处理系统的污泥量与底物量的物料平衡，利用式（6）与式（7）建立了该系统动态过程的状态方程，如式（8）与（9），这也是该处理系统非稳定状态下动力学基本微分方程式[6]：

$$\frac{dX}{dt} = X(YKS - K_d) - Q_wX/V \qquad (8)$$

$$\frac{dS}{dt} = (QS_o - QS)/V - XKS \qquad (9)$$

式中，dX/dt与dS/dt分别表示污泥浓度与底物浓度的变化速率。在状态方程中，X与S是状态变量，状态变量是时间的函数，是能够描述和规定系统运动或状态内容的变量，也可写成X(t)，S(t)。其它输入或控制变量也是时间的函数，也可写成Q(t)、S_o(t)、Q_w(t)等，而Y、K、K_d和V是常数、

维普资讯 http://www.cqvip.com

状态方程表示控制变量与状态变量之间的动态变化规律。

最优控制的第二个基本问题是建立目标函数的表达式。由于经济发展水平、水污染现状，人口密度、生活水平与地理位置等各种原因，即使同一国家，不同区域的污水排放标准也不相同。这是因为同样的污染对不同地区造成的危害是不同的。从污水处理系统的控制来看，要求的出水质量越好，其运行费用也越高。就是说，要想得到更好的出水质量，必须付出更高的代价。虽然处理后的出水仍然要造成一定的污染，但对于任何国家或地区来说，把污水处理的纯而又纯都是不现实的。反之，更不能为了节省运行费用而盲目地降低出水质量。那么，如何正确地把握处理系统的出水质量与运行费用之间的关系呢？如果出水中残留的污染物造成的危害或损失能用经济指标来衡量的话，这个问题就能用无约束条件的最优控制理论来解决。简单地说，解决这个问题的基本思想是，使出水中残留污染物带来的损失费（或排污费）与运行费用这两者之和为最小。这两者之和也就是最优控制的目标函数。对于将其出水排放到城市大型综合污水处理厂的中小型工业废水处理厂来说，有时要求出水不能超过某一规定的指标，而有时是按出水中排出的污染物质的总量来交费的，这样，出水中污染物带来的损失费就更直观了。下面建立这个目标函数的数学表达式。

以该系统中能通过控制来改变的总费用J为目标函数，它包括剩余污泥处置费J_1（不含初沉污泥，因为该污泥量不能通过控制来改变），它又包括污泥浓缩、消化、脱水、干化及最后处置等费用；回流污泥的运行费J_2；曝气池供氧费用J_3；排放出水中残留污染物所需要排污费或罚款J_4等。可表示为：

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \qquad (10)$$

在非稳定状态下上述各项费用都随时间而变动，某一期间（从T_0到T）的费用必须用积分式来表示。其中污泥处理与处置费用为：

J_1 =（单位污泥量的处置费A）×（排放的污泥量）

$$= A\int_{T_0}^{T} Q_W(t)\cdot X(t)\,dt$$

$$= A\int_{T_0}^{T} Q_W X\,dt \qquad (11)$$

由式（3）可见，回流污泥量Q_r是X_r、Q与X的函数，回流污泥费为：

J_2 =（回流单位污泥量所需要的电费B）×（回流的污泥量）

$$= B\int_{T_0}^{T} \frac{QX}{X_r - X}\,dt \qquad (12)$$

供氧所需费用取决于溶解单位氧气所需的费用C与曝气池中氧的消耗速率R_r。其中R_r是由作为能量被去除的底物量aVXq的耗氧和微生物（污泥）内源呼吸的耗氧两部分组成，如式（13）：

$$R_r = aVXq + bVX = VX(aKS + 1.42K_d) \qquad (13)$$

式中，a——作为能量被去除的底物与总去除底物的比，因此有$a = 1 - Y$；b——内源呼吸的氧利用率，有$b = 1.42K_d$。那么，

J_3 =（溶解单位氧量所需的费用C）×（耗氧量）

$$= C\int_{T_0}^{T} VX(aKS + b)\,dt \qquad (14)$$

式中C的数值取决于供氧机械与曝气扩散设备的效率。

J_4 =（排放单位污染物所交付的费用或罚款W）×（排出的污染物量）

$$= W\int_{T_0}^{T} QS\,dt \qquad (15)$$

其中污染物在污水生物处理中用底物（BOD或COD）表示。将式（11）～式（15）代入式（10），则得目标函数的表达式为：

$$J = \int_{T_0}^{T} L(X, S, Q_W, t)\,dt$$

$$= \int_{T_0}^{T} \left[AQ_W X + \frac{BQX}{X_r - X} + CVX(aKS + b)\right.$$

$$+WQS]dt \qquad (16)$$

其中L（X，S、Q_W、t）为积分型目标函数的被积函数。因为Q、S_0、X、S、Q_W等都是时间的函数，所以式（16）表示的目标函数是这些变量的泛函。如果$T_0=0$，T=1日，式（16）就表示处理系统每天所要支付的总费用。至此，建立了该处理系统无约束条件的目标函数。本最优控制的核心问题就是求出使目标函数J为最小的控制变量Q_W（t）随时间的变化规律。

二、极大值原理与最优控制数学模型的建立

最优控制所研究的中心问题是：怎样选择控制变量的变化规律才能使控制系统的性质及品质在某种意义下是最优的。它有可能在严格的数学基础上获得一个控制规律，使描述系统性能与品质的某个目标函数达到最优。无疑，这样一个问题的解决对控制系统的理论与实践都有着重大意义。可是最优控制数学模型的建立与求解都是比较复杂的。在现代控制论中，状态方程一般表示为：

$$\begin{cases}\dfrac{dX_1}{dt}=f_1(X_1,X_2,\cdots,X_n,u_1,u_2\cdots u_r,t)\\ \dfrac{dX_2}{dt}=f_2(X_1,X_2,\cdots,X_n,u_1,u_2,\cdots u_r,t)\\ \vdots\\ \dfrac{dX_n}{dt}=f_n(X_1,X_2,\cdots X_n,u_1,u_2,\cdots u_r,t)\end{cases} \qquad (17)$$

若用向量来表示，则为：

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=f(x,u,t) \qquad (17)$$

式中，x——n维状态向量；u——r维控制向量；f——n维向量函数。它们都是时间t的函数。向量函数f一般是非线性的（本文中写的黑体字都表示向量）。在确定的初始条件$x(0)=X_0$下，如果在时间间隔$[T_0,T]\subset[T_1,T_2]$上给定一个控制规律u，即u(t)，则状态方程（17）有唯一解x(t)。它唯一地表示了系统的运动与状态变化规律。

在状态变量的端点条件不受限制时，目标函数J用泛函数描述如下：

$$J=\int_{T_0}^{T}L(X_1,X_2,\cdots,X_n,u_1,u_2,\cdots u_r,t)dt=\int_{T_0}^{T}L(x,u,t)dt \qquad (18)$$

本文所研究的污水处理系统的状态方程式（8）～（9）就是式（17）的具体形式。其中n=2，r=1，污泥浓度X与底物浓度S为二维状态变量，$u=Q_W$为一维控制变量。

一般地，根据变分法基本原理，可以在时间间隔$[T_0,T]$上求出一个使目标函数J为最小（或最大）的控制规律$u^*=u^*(t)$，这就是最优控制问题的求解。简单地说，在给定的初始条件下，最优控制的解可以通过引入拉格朗日（Lagrange）未定向量函数λ（也称伴随变量）与哈密顿（Hamiltania）函数H（简称H函数）之后，求解以下2n+m个联立方程（其中+2n个一阶微分方程，r个代数方程）

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u,t) \qquad (17)$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial L}{\partial x}-\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{\partial L}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\lambda=0 \qquad (20)$$

的解来得到，其中H函数的表达式为：

$$H(x,u,t)=L(x,u,t)+\lambda^T(t)\cdot f(x,u,t) \qquad (21)$$

未定向量函数λ（t）的端点条件是：

$$\lambda(T)=[\lambda_1(T),\lambda_2(T),\cdots\lambda_n(T)]^T \qquad (22)$$

然而，在实际的工程系统中，控制变量往往不能任意取值，而是受到某些限制。在控制变量能取值的范围称为控制域，以U表示，那么，控制变量受到的限制可简写为：

$$u\in U \qquad (23)$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

例如，在本文研究的污水处理系统中的控制变量$Q_W(t)$就不能取负值（即不能向曝气池中投加活性污泥）。此外，古典变分法对函数f和L的可微性要求也很严格，特别是要求$\partial L/\partial u$的存在，而在实际工程系统中往往不满足这个条件。因此，用古典变分法很难处理这类问题。庞特里亚金等人提出的极大值原理为解决控制变量受约束情况下的最优控制问题提供了有力工具，同时，它对函数f、L的可微性的要求也不过分严格。

使目标函数J取得极小值（如果原题要求极大值，则只需引入新的目标函数$J'=-J$即可）的最优控制用$u^*=u^*(t)$来表示，对应的状态方程的解称为最优轨线，以$x^*=x^*(t)$来表示，相应的向量函数为$\lambda^*=\lambda^*(t)$。由于控制变量被限制在控制域内，求得的最优控制变量不一定能满足式（20）中的$\partial H/\partial u=0$。庞特里亚金的极大值原理指出：使目标函数取得极值的最优控制$u^*(t)$存在的必要条件是：

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_*=\left.\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}\right|_*=f(x^*,u,t) \qquad (24)\\ \left.\dfrac{d\lambda}{dt}\right|_*=\dfrac{-\partial H}{\partial x}\\ \qquad =-\left.\dfrac{\partial L}{\partial x}\right|_*-\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_*\cdot\lambda^* \qquad (25)\\ H[x^*,\lambda^*,u^*,t]\\ \qquad =\min\limits_{u\in U}H[x^*,\lambda^*,u^*,t] \qquad (26)\end{array}\right.$$

其中$x^*(t)$与$\lambda^*(t)$满足下面的边界条件：

$$x^*(T_0)=x_0 \qquad (27)$$

$$\lambda^*(T)=0 \qquad (28)$$

式（27）的边界条件是被控制系统状态变量在$t=T_0$的初始条件的值，对于特定系统是已知的。如果对末值状态变量没有约束，则如式（28）所示，向量函数的末端条件为零，也是已知的。这样，这个最优控制问题就化成了求解常微分方程的两点边值问题。虽然求解这样的问题也并非易事，然而对于解最优控制问题总是前进了一大步。将庞特里亚金的极大值原理中式（24）～（26）与通过变分法原理建立的数学模型中的式（17）、式（19）与式（20）相比则可发现，两者的差别仅在于式（26）与式(20)，即当控制变量受约束时，见式（23），对于最优控制不再有$\partial H/\partial u=0$，但函数H仍具有极小值。还应指出，式（24）～（26）只是最优控制所应满足的必要条件，对于它给出的解可根据问题的性质来判断其充分性。

根据极大值原理，以式（16）为目标函数的无约束条件的活性污泥法处理系统的最优控制$Q_W^*(t)$（以下各式中其它符号省略*号）存在的必要条件为：

$$\frac{dX}{dt}=X(YKS-K_d)-\frac{Q_W^*X}{V} \qquad (29)$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{Q(S_0-S)}{V}-KSX \qquad (30)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=-AQ^*_W-\frac{BQX_r}{(X_r-X)^2}-CV(aKS+b)-\lambda_1\left(YKS-K_d-\frac{Q_W^*}{V}\right)+\lambda_2KS \qquad (31)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt}=-KX-(CaV+\lambda_1Y)+\lambda_2(Q/V+KX)-WQ \qquad (32)$$

$$\begin{aligned}H(X,S,\lambda_1,\lambda_2,Q^*_W,t)=\min_{Q_W\geqslant 0}\Big\{&AQ_WX+\frac{BQX}{X_r-X}\\&+CVX(aKS+b)+WaS+\lambda_1X(YKS-K_d+Q_W/V)\\&+\lambda_2[Q(S_0-S)/V-KSX]\Big\}\end{aligned} \qquad (33)$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

根据本文所研究的问题性质，其最优控制的解是存在的，那么，式（29）～（33）所示联立方程就是所要建立的最优控制数学模型。其解$Q_W^*(t)$就是所求的最优控制变量的变化规律，相应的状态变量X(t)，S(t)为最优轨线。

三、最优控制变量的计算方法及程序设计

城市污水与工业废水每天大致呈周期性变化，一般以一日作为一个控制周期。即$T_0=0$，$T=1$。这时式（29）与式（30）中状态变量的初始条件X(0)与S(0)就是它们在控制开始时的初值，是已知的；在式（31）与式（32）中，伴随变量的末值条件$\lambda_1(1)=\lambda_2(1)=0$。在最优控制数学模型式（29）～（33）中，有四个一阶微分方程与一个代数方程，四个边界条件，五个未知变量Q_W、X、S、λ_1、λ_2，因此方程有解，其求解计算属于非线性常微分方程两点边值问题。对这个问题很难求得解析解，而必须借助计算机用数值计算方法直接求出最优解，这称为直接方法。其中最常用的方法是梯度法。也是最基本的方法。

梯度法又称最陡下降法，它的基本思想是，根据极大值原理，最优控制u^*应使H函数取得极小值，首先猜测一个u^0，求出对应的x^0、λ^0和H^0，然后逐次修正u，使对应的H值逐次减小，直至趋近最小值，这时目标函数J也取得了最小值，而对u的每次修改均沿函数H值的“最徒下降”的方向进行，显然，这样做逐次近似过程收敛也最快。

H函数沿其梯度的方向变化最快，最陡下降方向是梯度的逆方向，即$-\partial H/\partial u$。方向确定后还应合理地选择步长K^i（i为迭代计算次数），其原则是使迭代过程不发散，而且收敛的较快。那么控制变量的修正量为

$$\Delta u^i=-K^i\frac{\partial H}{\partial u^i} \qquad (34)$$

式中$K^i>0$。目标函数J在第i次计算的改变量ΔJ^i为

$$\Delta J^i=\int_{T^0}^{T}\left(\frac{\partial H}{\partial u^i}\right)^{\tau}\Delta u^i dt \qquad (35)$$

由于猜测的$u^i(t)$代入状态方程与伴随方程可求出$x^i(t)$与$\lambda^i(t)$，所以式（34）与式（35）的Δu^i与ΔJ^i值可以计算。这样就又得到了控制变量新的近似值$u^{i+1}(t)=u^i(t)+\Delta u^i(t)$，进行新的迭代计算，直至$\Delta J^i$小于预先给定的值为止。

综上所述，用梯度法解最优控制问题的计算步骤如下：

1．建立哈密顿函数H，伴随方程，最优控制数学模型及边界条件；

2．猜测一个$u^i(t)$，i＝0，1，2，……；

3．利用状态方程及初始条件解出$x^i(t)$；

4．利用伴随方程及末值条件逆时间方向解出$\lambda^i(t)$；

5．根据前面的计算结果，计算$\partial H/\partial u^i$；

6．确定步长参数K^i及控制变量的修改量

$$\Delta u^i(t)=-K^i\frac{\partial H}{\partial u^i}$$

7．计算控制变量的新的近似值$u^{i+1}=u^i(t)+\Delta u^i(t)$；

8．重复上述迭代过程，直至J的变化量ΔJ（或Δu）小于预先给定的精度。

完成上述计算需要相当多的迭代过程，必须进行上百次甚至更多次数的微分方程组的数值计算，应当用大中型计算机才能完成。用梯度法求解本文所研究的污水处理系统最优控制问题的计算机程序框图如图2所示（计算程序略）。图中IM为最大迭代次数；α为预先确定的精度；Δt为求解微分方程时设定的积分步长；$Q^0_W(t)=u_0^0(t)$为最初猜测的控制变量随时间的变化。

选择最合适的步长参数K^i常常是相当困难的事。一种实际上行之有效的方法是每一

维普资讯 http://www.cqvip.com

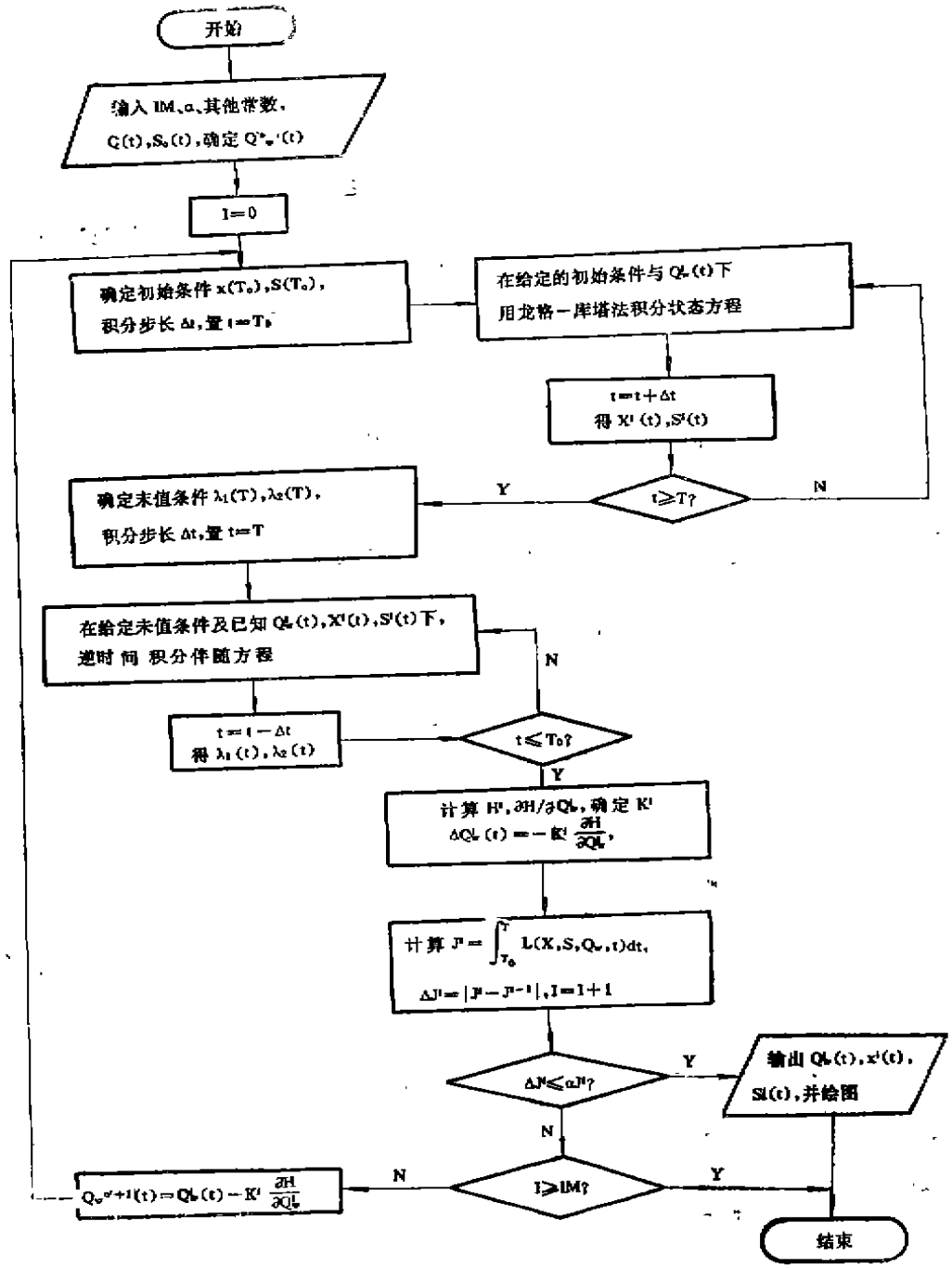


图 2 污水处理系统无约束条件最优控制问题的计算方法

次迭代计算中均首先选取上一项步长参数 K^{I-1}的一半、二倍、三倍、十倍作为新的步长进行试算，然后确定能使⊿J下降最大者作为本次计算的K^I。用梯度法解题时开始阶段往往收敛较快，但接近最优解时收敛变慢（见图 3）。

按照图 2 所表示的计算方法的程序框图，编制的计算程序就可进行最优控制计算，求出使污水处理系统总费用这一目标函数J为最小的最优控制变量Q_W（t）的变化

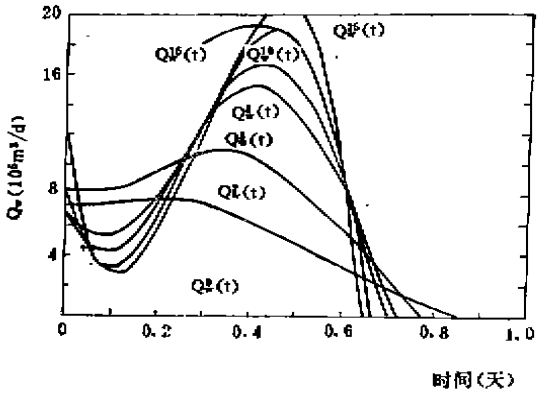


图3 控制变量向最优控制逼近的计算过程

规律，以及相应的状态变量（最优轨线）X（t）与S（t）的变化情况。为此，首先确定最优控制数学模型式（29）～（33）中的动力学常数K、Y、K_d、a、b及其它参数V、A、B、C、W等的取值，以及假定进水流量与底物浓度随时间的变化情况如下：

$$Q(t) = 100 + 50\ \sin 2\pi t \quad (10^3 m^3/d) \qquad (36)$$

$$S_0(t) = 200 + 50\ \sin 2\pi t\ (mg/l) \qquad (37)$$

最初猜测的控制变量很难准确，首先任意取$Q_W^0(t) = 0$，随着迭代次数的增加，控制变量向最优控制逼近的计算情况如图3所示。在处理系统中，动力学常数取决于污水的性质与成分，回流单位污泥量所需电费B与溶解单位氧量所需费用C也变化不大。而单位污泥量的处置费A的取值与处理方式、污泥成分以及处理程度等很多因素有关，其所需费用A值相差很大。排放单位污染物所支付的费用或罚款W的取值也与很多因素有关，其取值范围更大。我们取若干不同的A与W的数值，进行了最优控制问题的求解数值计算。图3与图4所表示的仅是当A = 0.05元/公斤污泥，W = 0.35元/公斤BOD时的计算结果。图4表示当ΔJ满足精度要求（随着迭代次数的增加，目标函数J逐渐减小），即已经求出近似的最优控制变量$Q_W(t)$时，相应的最优轨线X（t）、S（t）随时间的变化情况。此时目标函数（费用）最小，J_{min} = 3,142.6元/日，图3与图4是计算机根据计算结果自动绘制的。

按最优控制来运行的处理系统能使每日所支付的总费用最少，即目标函数取得最小值，记作J_{min}，相应的每日平均出水底物浓度称为最优平均出水底物的浓度，记作$\overline{S}_{op}$。我们取不同的W值进行最优控制的数值计算，在最优控制下得到相应J_{min}和$\overline{S}_{op}$的计算结果汇总于表1。从中可以看到排放单位污染物所需要的费用或罚款W越大，处

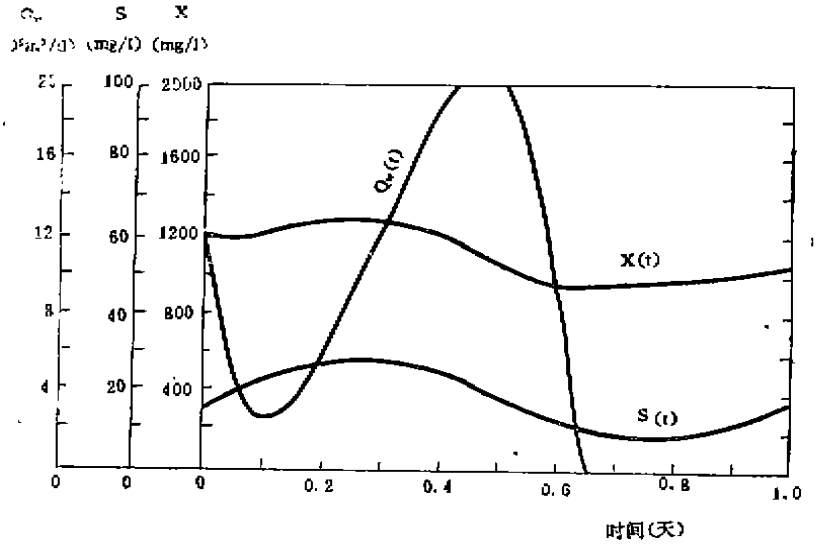


图4 最优控制时状态变量随时间的变化情况

维普资讯 http://www.cqvip.com

理系统所必须支付的最小总费用J_{min}越大。而处理系统的最优平均出水底物浓度$\overline{S}_{op}$越小。这是很容易理解的，因为W值越大就意味着有关当局对出水质量的要求越加严格（通过增大排污费来体现），那么处理系统必须付出更大的代价来满足要求。为了使总费用J最小，最优控制的结果也只好通过降低最优平均出水浓度$\overline{S}_{op}$来实现。

表1 W与J_{min}、$\overline{S}_{op}$的关系

W (元/公斤BOD)	J_{min} (元/日)	$\overline{S}_{op}$ (mg/l)
0.80	3926.7	15.22
0.50	3445.0	17.54
0.35	3142.6	20.97
0.20	2750.5	30.77

四、结 语

几乎所有的城市污水与工业废水的水质水量都随时间不断变化，有时其变化幅度还很大，它使污水处理系统始终处于非稳定状态运行，同时给处理系统运行控制与管理带来很多麻烦。如果能采取最优控制策略，不仅能定量地控制出水质量，还能尽可能地减小运行费用。另外，对于所有具有动态过程的工业系统来说，实现最优控制都是今后发展的方向。

本文以非稳定状态下完全混合式活性污泥法污水处理系统无约束条件最优控制的计算方法为例，简述了处理系统的状态方程、目标函数与最优控制数学模型的建立，并着重介绍了求解最优控制变量的计算方法。可以看到，从现代控制论与该问题的计算方法来看，并不存在解决不了的问题。除了本文谈到的梯度法计算方法之外，还有二级梯度法、共轭梯度法、平行切面法等不同的计算方法来解决不同类型的问题。还应看到，本文研究的无约束条件的最优控制问题只能用于对处理系统的出水质量并没有某一确定的严格规定，而出水中残留污染物造成的损失或危害能用经济指标（比如交纳排污费或罚款）来表示的场合。对于必须遵循严格的排放标准的处理系统来说，应当用有约束条件的最优控制来解决。

我们认为，虽然污水处理系统实现最优控制不仅需要相当高的运行管理水平，而且必须首先实现计算机的自动连续监测与控制，近期内还难于普及，但是，使之实现最优控制不仅是可能的，也是必要的，而且是今后控制策略发展的最终目标。因此，关于污水处理系统最优控制的研究应当先行一步，更深入地展开。

参 考 文 献

〔1〕Fan, L. T. et al., Jour. Water Res., 7, 1609 (1973).

〔2〕Yeung, S. Y. S. et al., Jour. Water Res., 14, 77 (1983).

〔3〕Metcale and Eddy, Inc., Wastewater Engineering, McGraw-Hall Books Company, New York, 69, (1972).

〔4〕Benefield L. D. et al., Biological Process Design for Wastewater Treatment, Prentice-Hall, 131 (1980).

〔5〕McCarty, P. L., Jour. Water Pollut. Control Fed., 38, 493(1986b).

〔6〕邬永臻、王宝贞，活性污泥法污水处理系统控制策略的研究，待发表 (1990).

〔7〕Lawrence, A. W. and McCarty, P. L., Jour. Sanit. Eng. Div., ASCE., 96(SA3), 575 (1970).