用麦夸尔特法推求给水管道造价公式参数

李树平[1]，黄廷林[2]，刘遂庆[1]

(1. 上海同济大学，上海 200092； 2. 西安建筑科技大学，陕西 西安 710055)

摘　要：给水管道造价公式的正确性直接关系到给水工程系统技术经济计算的科学性．本文应用数理统计学中、能有效解决已知非线性关系式参数估计问题的麦夸尔特法，来推求给水管道造价公式参数．其中造价公式的参数迭代初值直接由计算机来完成，参数估计不受人工干预，能够达到一举寻优的目的．通过算例说明该方法实用可行，拟合精度较高．

关键词：管道造价公式；麦夸尔特法；非线性关系式；参数估计

中图分类号：TU 991.36　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-7930(2000)01-0016-04

Application of the Levenberg-Marquardt method in determining the parameters of the water pipe cost formula

LI Shu-ping[1], *HUANG Ting-lin*[2], *LIU Sui-qing*[1]

(1. Tongji University, Shanghai 200992, China;
2. Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: The accuracy of the water pipe cost formula is directly corresponding to the rationality of water supply system's computing. The Levenberg-Marquardt method is an effective method in estimating the parameters of a known nonlinear function, so it is used to solve the problem for determining the parameters of water pipe cost formula. The computer produces the initial values of the parameters, and result can be acquired by the method at one stroke. The calculation of cases shows that this method is feasible and can greatly increase the fit accuracy.

Key words: *pipe cost formula*; *Levenberg-Marquardt method*; *nonlinear function*; *parametric estimation*

管道造价公式是给水工程设计和改扩建的重要定量经济性指标，管道造价公式参数取值直接影响经济评价和设计结果[1]．管道工程单位长度综合造价一般可表示为管径的函数：

$$C_i = a + bD_i^{\alpha} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

式中：D_i 为管道公称直径；C_i 为单位长度综合造价；a，b，α 为待估参数，它们与地区及相应的施工条件、水文地质条件以及管材价格等有关．

在对方程(1)进行回归分析时，确定出最佳的 α 值，是传统方法推求给水管道造价公式参数时的一个要点[2]．但是随着对 α 值精度要求的提高，其计算量将会越来越大，传统方法已不能满足工程技术需要．为了解决这个问题，本文应用麦夸尔特法来推求给水管道造价公式参数．麦夸尔特法（又称 Levenberg-Marquardt 法）是一种解决已知非线性关系式的参数估计问题的有效方法[3]．对于式(1)中 a，b，α 的参数估计，该方法可以实现一举寻优，不须对 α 值进行判断，其计算量也不受所求 α 值精度的影响．

收稿日期：1999-09-14

作者简介：李树平(1972-)，男，河北永年人，同济大学博士生．

1　麦夸尔特法[4]

非线性关系式的一般形式为

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_p; b_1, b_2, \cdots, b_m) + \varepsilon$$

其中 f 是已知非线性函数,$x_1, x_2, \cdots, x_p$ 是 p 个自变量,$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 是 m 个待估未知参数,ε 是随机误差项,设对 y 和 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 通过 n 次观测,得到 n 组数据:

$$(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ip}, y_i) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

将自变量的第 i 次观测值代入函数得

$$f(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ip}; b_1, b_2, \cdots, b_m) = f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})$$

因 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ip}$ 是已知数,故 $f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 的函数. 先给 $\boldsymbol{b}$ 一个初始值 $\boldsymbol{b}^{(0)} = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \cdots, b_m^{(0)})$,将 $f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})$ 在 $\boldsymbol{b}^{(0)}$ 处按泰勒级数展开,并略去二次及二次以上的项得

$$f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b}) \approx f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b}^{(0)}) +$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})}{\partial b_1}\bigg|_{b=b^{(0)}} (b_1 - b_1^{(0)}) + \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})}{\partial b_2}\bigg|_{b=b^{(0)}} (b_2 - b_2^{(0)}) + \cdots + \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})}{\partial b_m}\bigg|_{b=b^{(0)}} (b_m - b_m^{(0)}) \qquad (2)$$

这是 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 的线性函数,上式中除 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 之外皆为已知数,对此用最小二乘法原理,令

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - \left[f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b}^{(0)}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})}{\partial b_j}\bigg|_{b=b^{(0)}} (b_j - b_j^{(0)}) \right] \right\}^2 + d \sum_{j=1}^{m} (b_j - b_j^{(0)})^2$$

其中 $d \geq 0$ 称为阻尼因子,当取 $d = 0$ 时,就是高斯-牛顿法,高斯-牛顿法是麦夸尔特法的特殊形式,它对迭代初值的选择要比麦夸尔特法更加严格.

欲使 Q 值达到最小,令 Q 分别对 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 的一阶偏导数等于零,于是得方程组:

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial b_k} = 2 \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b}^{(0)}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})}{\partial b_j}\bigg|_{b=b^{(0)}} (b_j - b_j^{(0)}) \right] \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})}{\partial b_k}\bigg|_{b=b^{(0)}} + 2d(b_k - b_k^{(0)})$$

$$k = 1, 2, \cdots, m$$

可化为以下形式:

$$\begin{cases} (a_{11} + d)(b_1 - b_1^{(0)}) + a_{12}(b_2 - b_2^{(0)}) + \cdots + a_{1m}(b_m - b_m^{(0)}) = a_{1y} \\ a_{21}(b_1 - b_1^{(0)}) + (a_{22} + d)(b_2 - b_2^{(0)}) + \cdots + a_{2m}(b_m - b_m^{(0)}) = a_{2y} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}(b_1 - b_1^{(0)}) + a_{m2}(b_2 - b_2^{(0)}) + \cdots + (a_{mm} + d)(b_m - b_m^{(0)}) = a_{my} \end{cases} \qquad (3)$$

其中

$$\begin{cases} a_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})}{\partial b_j}\bigg|_{b=b^{(0)}} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})}{\partial b_k}\bigg|_{b=b^{(0)}} = a_{kj} \\ a_{jy} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b}^{(0)})) \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})}{\partial b_j}\bigg|_{b=b^{(0)}} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \cdots, m; k = 1, 2, \cdots, m \qquad (4)$$

从而解得

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ \cdots \\ b_m^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} + d^{(0)} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} + d^{(0)} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} + d^{(0)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1y} \\ a_{2y} \\ \cdots \\ a_{my} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

显然,此解与代入的初始值 $b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \cdots, b_m^{(0)}$ 和 $d^{(0)}$ 有关. 若解得各 b_j 与 $b_j^{(0)}$ 之差的绝对值皆很小,则认为估计成功. 如果 $(b_j - b_j^{(0)})$ 较大,则把上一步算得的 b_j 作为新的 $b_j^{(0)}$ 代入(3)式,从头开始上述计算,再解出新的 b_j 又作为新的 $b_j^{(0)}$ 再代入(3)式,又从头开始,如此反复迭代,直至 b_j 与 $b_j^{(0)}$ 之差可以忽略为止. 在式(3)中,因 $a_{1y}, a_{2y}, \cdots, a_{my}$ 是定值,故 d 愈大必然使解 $b_1 - b_1^{(0)}, b_2 - b_2^{(0)}, \cdots, b_m - b_m^{(0)}$ 的绝对值愈小. 极端的情况有 $\lim\limits_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{m} (b_j - b_j^{(0)})^2 = 0$,但 d 若选择过大将增加迭代次数,为减少迭代次数,d 又要选小. 选

择的界限是看残差平方和是否下降，这样在迭代过程中需不断变化 d 的取值.

2　管道造价公式参数推求的方法步骤

在实际工作中，可根据当地的具体情况，统计出给水管道中每种管径 D_i 的单位造价 C_i，得出 n 个数据 $(D_1,C_1),(D_2,C_2),\cdots,(D_n,C_n)$. 这些数据是进行管道造价公式推求的基础. 在式(1)中有三个待估参数 a,b,α，应用麦夸尔特法进行估计，其方法步骤如下：

(a) 由式(1)对 a,b,α 分别求偏导数，得

$$\frac{\partial C_i}{\partial a}=1;\quad \frac{\partial C_i}{\partial b}=D_i^\alpha;\quad \frac{\partial C_i}{\partial \alpha}=bD_i^\alpha \ln D_i=b(\frac{\partial C_i}{\partial b})\ln D_i \tag{6}$$

(b)选择参数迭代初值，初值选择的合适与否，将决定迭代计算的工作量以及迭代过程收敛与否. 本文采用的初值选择方法如下：

从实际资料 (D_i,C_i) 中任意选出三组数据依次编号为 $(D_1,C_1),(D_2,C_2),(D_3,C_3)$ 代入式(1)，得方程组

$$\begin{cases} C_1=a+bD_1^\alpha \\ C_2=a+bD_2^\alpha \\ C_3=a+bD_3^\alpha \end{cases} \tag{7}$$

由式(7)可得

$$\frac{D_1^\alpha-D_2^\alpha}{D_1^\alpha-D_3^\alpha}=\frac{C_1-C_2}{C_1-C_3} \tag{8}$$

由式(8)应用二分法或黄金分割法求出 α，继而由 $b=\dfrac{C_1-C_2}{D_1^\alpha-D_2^\alpha}$，$a=C_1-bD_1^\alpha$，解得 b,a 值，以此 a,b,α 值作为迭代初值 $\boldsymbol{b}^{(0)}=(a,b,\alpha)$.

(c) 由 n 组实际资料 (D_i,C_i)，$i=1,2,\cdots,n$，以及式(6)和 $\boldsymbol{b}^{(0)}$ 值代入式(4)，可计算出式(3)中各系数值. 给定初值 $d=d^{(0)}=0.01a_{11}$，由式(3)解得式(5)的 $\boldsymbol{b}$ 值. 将此解得的估计量代入原函数式(1)计算残差平方和

$$Q^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}\left[C_i-(a+bD_i^\alpha)\right]^2 \tag{9}$$

显然，此值愈小愈好.

(d) 第二次迭代，令 $\boldsymbol{b}^{(0)}=\boldsymbol{b}$，$d=10^\beta$，$\beta=-1,0,1,2\cdots$. 先取 $\beta=-1$，即 $d=0.1d^{(0)}$，解得新的 $\boldsymbol{b}=(a^{(1)},b^{(1)},\alpha^{(1)})$，计算新的残差平方和

$$Q^{(1)}=\sum_{i=1}^{n}\left[C_i-(a^{(1)}+b^{(1)}D_i^{\alpha^{(1)}})\right]^2 \tag{10}$$

若 $Q^{(1)}<Q^{(0)}$，则第二次迭代结束. 若 $Q^{(1)}\geqslant Q^{(0)}$，则取 $\beta=0$，则 $d=d^{(0)}$，重解 $\boldsymbol{b}$，并重算残差平方和 $Q^{(1)}$. 若 $Q^{(1)}<Q^{(0)}$ 则第二次迭代结束，若 $Q^{(1)}\geqslant Q^{(0)}$，则取 $\beta=1$，即 $d=10d^{(0)}$，再重算 $\boldsymbol{b}$ 及 $Q^{(1)}$，若此 $Q^{(1)}<Q^{(0)}$，则第二次迭代结束，若 $Q^{(0)}\geqslant Q^{(0)}$，则取 $\beta=2$，即 $d=100d^{(0)}$，再重算 $\boldsymbol{b}$ 及 $Q^{(1)}$. …，如此不断增加 β 的值，直到 $Q^{(1)}<Q^{(0)}$ 为止，第四步结束.

(e) 第三次迭代，以第二次迭代结束时的 d 作为新的 $d^{(0)}$，$\boldsymbol{b}$ 作为新的 $\boldsymbol{b}^{(0)}$，$Q^{(1)}$ 作为新的 $Q^{(0)}$，重复第二次迭代的全过程，直到新的 $Q^{(1)}<Q^{(0)}$ 为止.

(f) 多次迭代，按(d)，(e)过程反复迭代，直到 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|b_j-b_j^{(0)}|\leqslant$ eps（允许误差）为止. 但要注意此时 d 不可太大. d 太大时，实际迭代并未成功，亦可使 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|b_j-b_j^{(0)}|\leqslant$ eps .

3　算例与比较

现以文献[2]、文献[5]、文献[6]中提供的数据资料，用本方法编制的程序进行计算，并将其计算结果与其他方法计算结果列表比较. 可以看出，本文推得的给水管道造价公式参数值或优于其他方法，或与其他方法计算结果相同. 在表1中相关系数 R 值由式(11)求得

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}[C_i - (a + bD_i^{\alpha})]^2}{\sum_{i=1}^{n}(C_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}C_j)^2}} = \sqrt{1 - \frac{Q^{(1)}}{\sum_{i=1}^{n}(C - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}C_j)^2}} \quad (11)$$

$R \in [0,1]$,R 值越大,说明拟合曲线与数据点吻合的情况越良好.

在表1,算例(1)的(D_i,C_i)资料取自文献[7]的表1,其他方法计算结果取自文献[7],采用直接拟合法.算例(2)的(D_i,C_i)资料取自文献[5]的表1,其他方法计算结果取自文献[5],采用回归与相关分析法.算例(3)的(D_i,C_i)资料取自文献[6]的表1,算例(4),(5),(6)的(D_i,C_i)资料取自文献[6]的表2,其他方法结果取自文献[6],采用高斯-牛顿法.

表 1　计算结果比较表

算例编号	其他方法				麦夸尔特法			
	a	b	α	R	a	b	α	R
(1)	22.98	400.24	2.204	0.998 895	22.988 8	400.244 0	2.206 1	0.998 895
(2)	32	614.275 5	1.568 6	0.998 2	37.102 0	607.928 1	1.592 5	0.998 326
(3)	29.84	224.77	1.81	0.998 64	29.836 8	224.769 7	1.809 0	0.998 643
(4)	53.72	929.49	1.73	0.995 38	53.715 2	929.487 8	1.731 3	0.995 379
(5)	80.44	1 229.91	1.68	0.999 83	80.388 3	1 229.954 2	1.679 1	0.999 831
(6)	41.91	1 413.04	1.59	0.997 6	41.963 9	1 412.959 7	1.591 2	0.997 604

4　结束语

通过理论分析和实例证明,本文提出的麦夸尔特法用于编制给水管道造价公式参数计算的程序是合理可行的.麦夸尔特法不但避免了传统方法中对 a 值调整的烦琐工作,而且本程序对 a,b,α 的初值选择由计算机直接生成,不须人工干预,能够达到一举寻优的目的.用该方法所求参数为最佳拟合参数,与实际数据吻合好,运算稳定,拟合精度较高.

麦夸尔特法对公式的适应性强,它不仅可以解决给水管道造价公式的参数估计问题,而且也为形如 $\Delta c = k_1 + k_2D^{k_3} + k_4H^{k_5} + k_6D + k_7DH^{k_8}$ 的排水管道费用函数[8]的参数估计提供了参考,在解决此类问题时,仅需在求 Δc 的偏导部分进行改动,而整个计算过程并不需改动.此外,麦夸尔特法也可用来解决环境工程和市政工程中其他已知非线性关系式的参数估计问题.

参考文献:

[1] 高飞.管线造价的曲线拟合及其精度[J].给水排水,1994,20(1):12-14.
[2] 彭永臻,崔福义.给水排水工程计算机程序设计[M].北京:中国建筑工业出版社,1994.
[3] 袁亚湘,孙文瑜.最优化理论与方法[M].北京:科学出版社,1997.
[4] 卢崇飞,高惠璇,叶文虎.环境数理统计学应用及程序[M].北京:高等教育出版社,1988.
[5] 王春成.微机在给水管道造价计算中的应用[J].中国给水排水,1988,4(2):59-60.
[6] 吕谋,曲富林,丁峰.给水管道费用函数中 a,b,α 的确定[J].给水排水,1994,20(1):9-11.
[7] 张怀宇.给水管道费用函数的参数估计方法与分析[J].西北建筑工程学院学报,1996,(4):47-51.
[8] 阎立华.微机在重力流排水管道系统优化设计中的应用[J].沈阳建筑工程学院学报,1990,6(3):52-57.