

# 均质滤料过滤阻力的数学模型

张建锋, 王晓昌, 金同轨 (西安建筑科技大学环境与市政工程学院, 西安 710055)

**摘要** 以 NaCl 为示踪剂, 测定滤层内水流电导率的变化, 通过分析、计算可以得到滤层内絮体的体积比截留量. 不同条件下的试验结果表明, 在过滤过程中, 水头损失梯度的变化只与截留的絮体体积有关, 与滤床厚度、加药量、滤速的改变几乎无关. 根据示踪剂实验结果, 得出了滤层过滤阻力数学模型的具体表达式, 并讨论了相关过滤阻力模型的适用性.

**关键词** 示踪剂试验 过滤阻力 数学模型

## Mathematical model of head loss in uniform media filter

ZHANG Jianfeng, WANG Xiaochang, JIN Tonggui (School of Environmental and Municipal Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055)

**Abstract** Tracer experiment was conducted by conductimetric measurements using NaCl solution flowing through a filter layer of uniform media. As a result, the volume-specific deposit in the filter layer was evaluated. Under various operation conditions, it was found that the variation of head loss gradient was only influenced by the volume-specific deposit of the filter layer, but the effects of filtration velocity, aluminum dose and filter depth were not evident. A mathematical model was thus obtained to describe the head loss in the filter layer based on the experimental data. The applicability of several mathematical models on head loss was also discussed.

**Keywords** tracer experiment; head loss; mathematical model

长期以来, 在过滤的试验研究方面, 滤层内絮体颗粒的比沉积量分布随时间变化规律的精确测定一直是一个难题, 这在很大程度上影响了运用试验结果对理论模型的验证, 使得过滤理论模型的研究进展缓慢<sup>[1]</sup>. 在过滤过程中随着杂质的截留, 其宏观结果是滤层阻力的增大, 微观结果则是滤层内颗粒沉积量的增加或滤层空隙率的减小. 对于后者, 一种方法是从滤层中直接取样测定颗粒沉积量, 但方法繁琐, 且难以连续测定. 因此, 人们试图将对颗粒的研究转向对在滤层空隙中流动的液体的可视化研究, 示踪实验则是最常用的方法. 早在 20 世纪 60 年代, Mintz 曾通过简单的示踪剂实验, 研究了滤层空隙率的变化规律<sup>[2]</sup>, 随后 Pendse<sup>[3]</sup> 及 Ives<sup>[4]</sup> 等也分别采用示踪实验的方法, 研究了滤层中沉积物的沉积模式, Matsui<sup>[5]</sup> 则采用氯化钠作为示踪剂, 研究了微絮凝过滤过程中絮体沉积量的变化. 吸取这些研究的经验, 我们在均质滤料直接过滤的研究中, 制作了一套简单的示踪剂试验装置, 通过测定示踪剂停留时间分布, 经过分析计算得到滤层内絮体的体积比沉积量, 进而得出了实用的滤层过滤阻力数学模型.

### 1 滤层过滤阻力的数学模型

在过滤过程中, 水中的固体悬浮物不断被截留在滤料的表面, 一方面引起滤层空隙率的减小, 另一方面引起滤料颗粒粒径增大, 因此滤层的空隙率和比表面积在过滤过程中不断变化.

滤层的空隙率与絮体的体积比沉积量有以下关系:

收稿日期 2002-03-29 修订日期 2002-06-22

基金项目 国家自然科学基金资助项目(批准号 59778022)

作者简介 张建锋(1970—), 男, 讲师(博士)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \sigma_V \quad (1)$$

式中,  $\varepsilon$  截污滤层空隙率;  $\varepsilon_0$  截污滤层初始空隙率;  $\sigma_V$  滤层内体积比沉积量(单位体积滤层中所截留的絮体体积)( $\text{cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$ )。对滤层内比表面积变化的描述形式决定于所采用的滤层结构模型, 结合球形滤料及圆柱形毛细管模型, Mackrle 和 Ives 给出了以下的计算关系, 即 Mackrle-Ives 模型<sup>[6]</sup>:

$$\frac{s}{s_0} = \left(1 + \frac{\sigma_V}{1 - \varepsilon_0}\right)^y \left(1 - \frac{\sigma_V}{\varepsilon_0}\right)^z \quad (2)$$

式中,  $s$  滤层内比表面积( $\text{cm}^2 \cdot \text{cm}^{-3}$ );  $s_0$  清洁滤层内比表面积( $\text{cm}^2 \cdot \text{cm}^{-3}$ );  $y, z$  常数。

一般快滤池中滤料空隙间水流的流态为层流, 在层流状态下, 过滤的阻力, 即滤层水头损失与滤速成正比。水头损失用 Carman-Kozeny 公式描述, 即:

$$\rho g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{k_k \mu s^2 u}{\varepsilon^3} \quad (3)$$

式中,  $\rho$  水的密度( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ );  $g$  重力加速度( $\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$ );  $H$  水头损失( $\text{cm}$ );  $k_k$  系数(取决于滤料颗粒的形状、尺寸和滤层的充填条件);  $\mu$  水的粘性系数( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ );  $u$  滤速( $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ );  $x$ : 滤层厚度( $\text{cm}$ )。将公式(1)、(2)代入(3)式, 得到截污滤层水头损失方程:

$$\rho g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{k_k \mu s_0^2 u}{\varepsilon_0^2} \left(1 + \frac{\sigma_V}{1 - \varepsilon_0}\right)^{2y} \left(1 - \frac{\sigma_V}{\varepsilon_0}\right)^{2z-3} \quad (4)$$

同一厚度的截污滤层与清洁滤层的水头损失之比, 即水头损失增长梯度为

$$\frac{H}{H_0} = \left(1 + \frac{\sigma_V}{1 - \varepsilon_0}\right)^{2y} \left(1 - \frac{\sigma_V}{\varepsilon_0}\right)^{2z-3} \quad (\text{恒滤速过滤}) \quad (5)$$

式中,  $H_0$  清洁滤层水头损失( $\text{cm}$ );  $H$  同一厚度截污滤层水头损失( $\text{cm}$ )。式(5)的左边可以实测, 右边各项中的  $\varepsilon_0, \sigma_V$  通过示踪剂试验求得。

## 2 实验装置及方法

反应工程中, 示踪剂试验被广泛应用于研究各种反应器的特性。这里将模型滤柱视为一个反应器, 在滤层中进行示踪剂试验, 根据所测停留时间分布曲线(RTD 曲线), 求出示踪剂信号通过一定厚度滤层的平均时间, 进而得到滤层空隙率和絮体体积比沉积量的变化规律。

根据反应器设计理论, 在滤层中进行示踪剂试验时, 滤层空隙率可以通过下式求得<sup>[7]</sup>:

$$\varepsilon = t_* \frac{u}{Z} \quad (6)$$

式中,  $t_*$  示踪剂试验信号投加点至测量点间的平均流动时间( $\text{s}$ );  $Z$  示踪剂试验信号投加点至测量点间的滤层厚度( $\text{cm}$ )。

过滤采用直接过滤的方式, 即一定浓度的原水加药混合后直接进入模型滤柱。示踪剂试验和过滤试验在一个模型滤柱中同时进行, 模型滤柱为内径 10 cm 的有机玻璃柱, 内装有效粒径  $d_{10} = 0.103 \text{ cm}$  的均质石英砂滤料, 滤层厚度为 98 cm。试验装置简图见图 1。

在模型滤柱的一定位置设置电导电极。试验中采用 30% NaCl 溶液作为示踪剂, 通过多管分散装置, 在滤层表面以脉冲的方式瞬时加入微量 NaCl 溶液, 由各电极所测电导率的变化得到 RTD 曲线, 通过分析求得一定厚度滤层的空隙率。试验中使用标准电导电极。电极分别设在滤层表面向下 0、5、10、20、35 及 50 cm 处, 通过微型计算机记录 NaCl 浓度的变化, 水头损失由

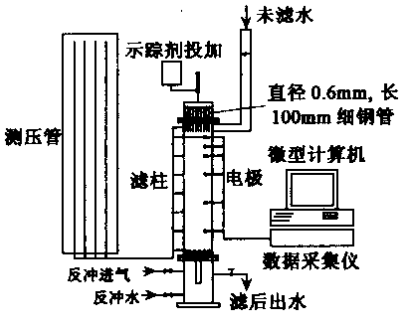


图 1 试验装置示意图

Fig. 1 Schematic diagram of experimental equipment

测压管直接读取。

图 2 给出在清洁滤层和截污滤层中测得的示踪剂试验响应曲线。从曲线的形状看,清洁滤层中的响应曲线接近正态分布曲线,浓度峰值两边基本对称。截污滤层响应曲线的峰值两边不对称,曲线的后端趋向平直,有很长的“尾巴”。随着过滤过程的进行,滤层水流中絮体不断沉积下来,滤层的空隙率及其结构均发生改变,响应曲线形状的变化是滤层空隙率及其结构改变的外在表现。另外,滤层沉积物也有空隙,在示踪剂通过滤层空隙主通道时,有部分示踪剂由于扩散作用进入沉积物中,待沉积物外围示踪剂浓度减小到一定程度后再重新进入主通道,这相当于在滤层水流中有一个滞流区(亦称死水区)。这样,在进行示踪剂响应曲线分析时,曲线的中心和偏移量就无法确定。因此,对示踪剂响应曲线的分析方法必须加以改进,以消除沉积物自身空隙对响应曲线的干扰。

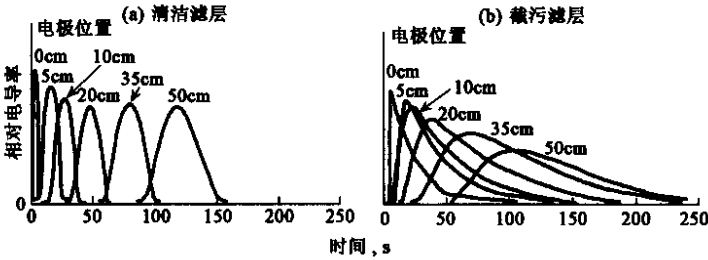


图 2 滤层示踪剂实验响应曲线

Fig. 2 Typical conductance curves in filter bed

根据图 2 给出的曲线形式,可以用一个附带死水区的扩散活塞流模型来模拟截污滤层中的示踪剂响应曲线。即滤层中实测的响应曲线由两条曲线迭合而成:一条为流过滤层空隙主通道的扩散推移流响应曲线;另一条为至少有 1 次进入死水区的示踪剂响应曲线。见图 3 所示。

研究发现,在多孔介质中进行示踪剂实验时,脉冲信号浓度峰值点的移动基本上不受滞流区的影响,示踪剂响应信号在到达最大值以前,流动形式可用扩散活塞流模型来模拟<sup>[3]</sup>。由实测的响应曲线前半部分确定的扩散模型,与实测结果的对比关系见图 4。这样,可以在响应曲线上选用浓度峰值和峰值前的任一浓度所对应的时间,将其代入扩散模型,进而对滤层中的示踪剂响应曲线进行分析计算。为了最大限度地利用测得的信息,选用峰值和 10% 峰值浓度对应的响应时间为基准。

在滤床内的扩散活塞流模型中,脉冲信号在滤层深度  $Z$  处的示踪剂响应曲线满足下列关系:

$$t_{\max} = t_* \left( \sqrt{\frac{1}{P_{eZ}^2} + 1} - \frac{1}{P_{eZ}} \right) \tag{7}$$

式中,  $t_{\max}$  脉冲信号峰值到达滤层深度  $Z$  处的时间(s);  $P_{eZ}$  以滤层深  $Z$  为特征尺寸的 Peclet 数。RTD 曲线上,10% 峰值浓度处对应的时间  $t_{10}$  与平均时间  $t_*$  有如下关系:

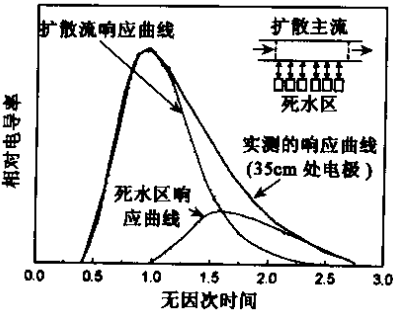


图 3 有死水区的扩散模型解析示意图

Fig.3 Modeling of an observed tracer response curve

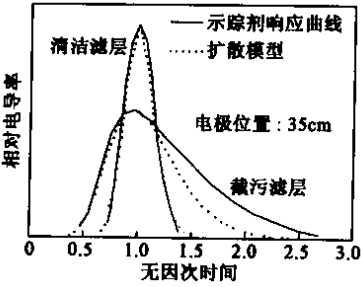


图 4 示踪剂响应曲线与扩散模型曲线的对比

Fig.4 Typical observed and calculated curves in filter bed

$$\frac{t_{10}}{t_*} = f(P_{eZ}) \tag{8}$$

式中,  $t_{10}$  RTD 曲线上 10% 峰值浓度处对应的时间(s);  $f$  函数关系. 式(8)代入式(7), 得

$$\frac{t_{10}}{t_{\max}} = \frac{f(P_{eZ})}{\sqrt{\frac{1}{P_{eZ}^2} + 1} - \frac{1}{P_{eZ}}} \tag{9}$$

函数  $f(P_{eZ})$  的表达式见有关反应工程非理想流模型的推导<sup>[7]</sup>. 通过式(9), 根据 RTD 曲线上的峰值及 10% 峰值浓度对应的时间可以推求  $P_{eZ}$ , 然后回代式(8), 求出平均时间  $t_*$  后代入式(6)和式(1)中, 即可得到截污滤层中的空隙率  $\epsilon$  和絮体的体积比沉积量  $\sigma_V$ .

3 实验结果

在过滤过程中, 水中悬浮颗粒不断被滤层截留而沉积于滤层的空隙中, 使滤层的空隙不断减小, 其外在的表现是滤层水头损失的不断增加. 这个过程可以用式(4)描述.

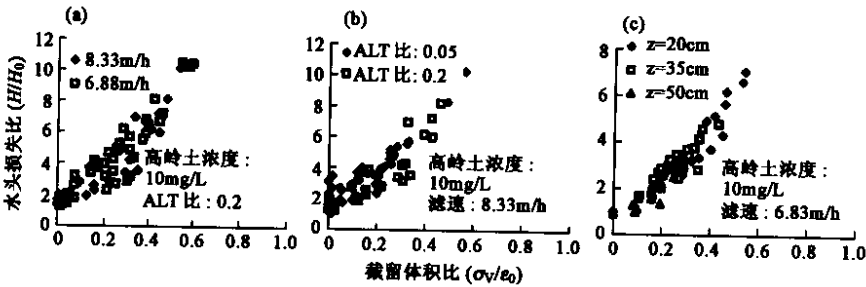


图 5 水头损失梯度与滤层截留体积比关系曲线

Fig.5 Variation curves of head loss with bulk-specific deposit

用一定浓度的高岭土溶液在不同投药量、不同滤速及不同滤层厚度下等速过滤时, 测得的水头损失梯度与用示踪剂实验得到的滤层体积比截留量的变化曲线如图 5 所示(图中 ALT 比 =  $[Al^{3+}]$  的投加量/原水浓度). 从图 5 中可以看到, 水头损失梯度的变化只与截留体积有关, 与滤床厚度、加药量、滤速的改变几乎无关. 即在不同的条件下, 滤层中截留的絮体体积对水头

损失的影响是一致的. 用不同条件下测得的水头损失与截留体积比, 可以推求式(5)中的系数  $y$  和  $z$ .

在多孔介质流体力学中, 对于介质空隙的描述还采用了水力半径的概念. 粒状滤层中空隙的水力半径等于空隙体积与滤层内部比表面积之比, 即

$$r = \frac{\epsilon}{s} \tag{10}$$

式中,  $r$  滤层空隙的水力半径 (cm). 根据式(2), 过滤过程中滤层空隙水力半径与沉积量的关系如下:

$$\frac{r}{r_0} = \left(1 + \frac{\sigma_V}{1 - \epsilon_0}\right)^{-y} \left(1 - \frac{\sigma_V}{\epsilon_0}\right)^{1-z} \tag{11}$$

式中,  $r_0$  清洁滤层空隙的水力半径 (cm).

考虑一种极限状态, 当滤层空隙被截留物完全阻塞, 即  $\sigma_V \rightarrow \epsilon_0$  时, 系数  $z$  对水力半径的影响. 有:

$$z < 1 \quad \lim_{\sigma_V \rightarrow \epsilon_0} r = 0 \tag{12a}$$

$$z = 1 \quad \lim_{\sigma_V \rightarrow \epsilon_0} r = r_0 \left(1 + \frac{\sigma_V}{1 - \epsilon_0}\right)^{-y} \tag{12b}$$

$$z > 1 \quad \lim_{\sigma_V \rightarrow \epsilon_0} r = \infty \tag{12c}$$

当  $z > 1$  时, 随着截留量的增加, 滤层空隙的水力半径为无穷大, 这显然与实际不符. 所以  $z$  值不可能大于 1. 在研究过滤过程中, 被众多的研究者所公认的一个事实是 滤层的空隙不可能完全被截留物充满. 当滤层的空隙减小到一定的

程度, 随着水流剪切作用的加强, 滤层逐渐丧失了截留水中悬浮物的能力, 但滤层还具有一定的通水能力, 即滤层空隙的水力半径在过滤终期达到一个恒值. 这里, 在  $z$  的取值范围内取  $z = 1$ , 将其代入式(5)后, 用非线性最小二乘法来对数据拟合 (见图 6), 得到  $y = 1.8$ . 因此, 均质滤料滤层过滤阻力的表达式为:

$$\rho g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{k_k \mu s_0^2 u}{\epsilon_0^3} \left(1 + \frac{\sigma_V}{1 - \epsilon_0}\right)^{3.6} \left(1 - \frac{\sigma_V}{\epsilon_0}\right)^{-1} \tag{13}$$

在前面的推导中, 对于滤层结构在过滤过程中变化的描述是基于球形滤料和圆柱形毛细管模型的结合. 这里, 从比表面积的角度对球形滤料和圆柱形毛细管模型在过滤模型研究中的适用性进行简单的讨论. 三种模型中比表面积计算公式如下<sup>[8]</sup>:

球形滤料模型

$$\frac{s}{s_0} = \left(1 + \frac{\sigma_V}{1 - \epsilon_0}\right)^{2/3} \tag{14}$$

圆柱形毛细管模型

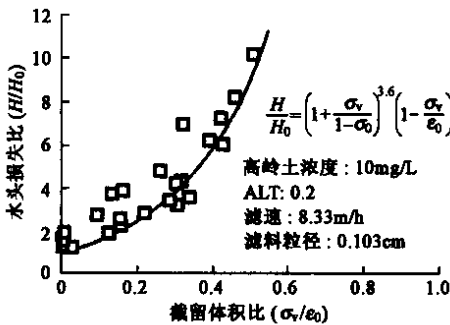


图 6 数据拟合关系示意

Fig.6 Fitting Curves

$$\frac{s}{s_0} = \left(1 - \frac{\sigma_V}{1 - \varepsilon_0}\right)^{1/2} \quad (15)$$

Mackrle-Ives 模型 ( $\gamma = 1.8, z = 1.0$ )

$$\frac{s}{s_0} = \left(1 + \frac{\sigma_V}{1 - \varepsilon_0}\right)^{1.8} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_V}{\varepsilon_0}\right) \quad (16)$$

三种模型中比表面积模拟计算结果见图 7. 图 7 中, Mackrle-Ives 模型所反映的滤层比表面积的变化规律为: 过滤初期渐增(接近球形滤料模型), 后期减小(接近圆柱形毛细管模型). 这与试验观察相吻合, 也与过滤模型研究中轨迹分析方法对模型的选用原则是一致的<sup>[8]</sup>. 因此, Mackrle-Ives 模型在其有关参数被确定后( $\gamma = 1.8, z = 1.0$ ), 可以用来很好地描述整个过滤过程滤层内比表面积的变化.

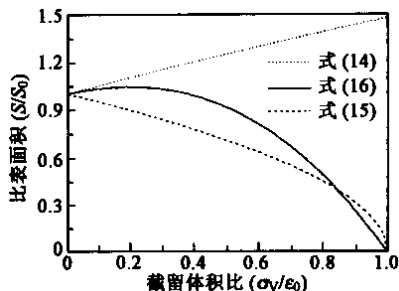


图 7 不同模型中比表面积计算结果

Fig.7 Calculated results of specific surface area by different models

#### 4 结语

本文将示踪剂试验应用于过滤研究, 通过测定滤层中截留絮体的体积和过滤阻力的关系, 从而确定了均质滤料滤层过滤阻力方程. 这将为过滤的试验研究和过滤模型的实用化打下良好的基础. 研究中的主要结论如下: (1) 通过对示踪剂在滤层空隙中的停留时间分布的分析计算, 可以得到滤层中的沉积物体积. (2) 水头损失梯度的变化与截留絮体的体积有关, 与滤床厚度、加药量、滤速的改变几乎无关. (3) Mackrle-Ives 模型可以用来很好地描述整个过滤过程滤层内比表面积的变化.

#### 参考文献:

- [1] 许保玖, 等. 给水处理理论与设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1992
- [2] Mintz D M, *et al.* Hydraulic resistance of a granular mass in the process of clogging[J]. Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 1970, 192: 304
- [3] Pendse H, Tien C, Rajagopalan R, *et al.* Dispersion measurement in clogged filter beds: a diagnostic study on the morphology of particle deposits[J]. J. AIChE, 1978, 24(3): 473-484
- [4] Coad M A, Ives K J. Investigation of deep bed filtration using tracers[Z]. In: Filtech Conference. London, 1981: 131-136
- [5] Matsui Y., *et al.* Mathematical description of deep filter performance[J]. J. Water SRT-Aqua, 1995, 44(5): 166-179
- [6] Ives K J. Mathematical models of deep bed filtration, in The Scientific basis of filtration[M]. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1975
- [7] Levenspiel O. Chemical reaction engineering, 3rd edition[M]. John Wiley & Sons INC., New York, 1999
- [8] Chiang H W, Tien C. Dynamics of Deep-bed filtration. Part I: Analysis of two limiting situation[J]. J. AIChE, 1985, 31(8): 1349-1359