考虑三维流速分布的斜管沉淀水力计算研究

施　周　姜乃昌　秦戍生　许光眉

提要　从管内流态为层流及流速分布呈旋转抛物面的假定出发，推导了包含沉淀颗粒之加速度 a，初始沉速 u_{0i}，以及斜管长 L，计算半径 r_i 和倾角 θ 等参数的斜管水力计算式，并且由该式进一步简化导得现行的其它斜管沉淀水力计算公式。此外，还就斜管沉淀的影响因素进行了探讨。

关键词　斜管沉淀　水力计算　流速分布

国内外对斜管(板)沉淀水力计算的理论研究，在忽略管内三维流速分布等影响因素的条件下，已取得若干有意义的结果[1~3]。由于对影响因素的简化，显然这些结果从理论上讲具有一定的不完善性，在实际设计中也会带来一定的计算误差。因此，本文拟在尽可能多地综合考虑影响斜管沉淀的主要因素的前提下，推导斜管(圆形断面)沉淀的一般水力计算公式，并进行若干理论上的探讨。

1　水力计算公式的推求

首先，我们假定：①斜管内水的流态为层流；②管内流速分布呈旋转抛物面形；③沉淀颗粒具有初始沉速 u_{0i}，以恒定加速度 a 下沉；④颗粒一经沉入下部管壁，便认为已被去除。

对上向流斜管，建立 xyz 坐标系见图 1。在 $z=z_i$ 的纵断面(BB′)上，由假定①，②及文献[4]，有管内纵向流速 v_i：

$$v_i = K(R^2 - y^2 - z_i^2) \tag{1}$$

式中 $K=\dfrac{\gamma J}{4\mu}$(γ 为水重度，J 为水力坡度，μ 为动力粘滞系数)，R 为斜管横截面半径。

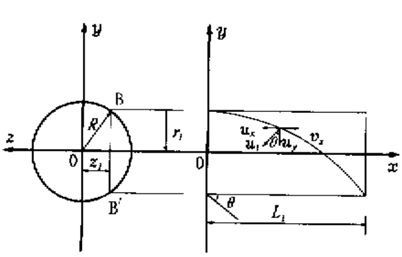

图 1　斜管内 xyz 坐标系及颗粒沉降示意

由假定③，有：

$$u_i = u_{0i} + at \tag{2}$$

将 u_i 沿 x，y 方向分解：

$$\begin{cases} v_x = v_i - u_i\sin\theta \\ u_y = -u_i\cos\theta \end{cases} \tag{3}$$

式中 v_x，u_y——分别为沿 x，y 方向的速度分量，$v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$u_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$；

v_i，u_i——分别为 BB′ 断面上任一时刻 t 颗粒所在处的管内水流速度和颗粒沉速；

u_{0i}——BB′ 断面上颗粒之截留速度；

θ——斜管在水平方向的倾角。

将 $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$u_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 及式(1)－式(2)代入式(3)并整理得：

$$\mathrm{d}x = [K(R^2-y^2-z_i^2) - (u_{0i}+at)\sin\theta]\mathrm{d}t \tag{4}$$

$$\mathrm{d}y = -(u_{0i}+at)\cos\theta\mathrm{d}t \tag{5}$$

对式(5)进行积分，并分别以边界条件 $\begin{cases} y=-r_i \\ t=T_i \end{cases}$ 及 $\begin{cases} y=r_i \\ t=0 \end{cases}$ 代入得：

$$y = -\left(u_{0i}t+\frac{1}{2}at^2\right)\cos\theta - r_i + \left(u_{0i}T_i+\frac{1}{2}aT_i^2\right)\cos\theta \tag{6}$$

$$y = -\left(u_{0i}t+\frac{1}{2}at^2\right)\cos\theta + r_i \tag{7}$$

将式(6)－式(7)整理得：

$$u_{0i} = \left(\frac{2r_i}{\cos\theta} - \frac{1}{2}aT_i^2\right)\Big/T_i \tag{8}$$

这里，T_i 表示为 BB′ 断面上具有 u_{0i} 的颗粒从起点 B 开始下沉至底壁所需沉淀时间。显然，式(8)反映了在任一纵断面 BB′ 上，u_{0i} 与 T_i 的关系。由于

在实际设计运行中，水流在斜管内的停留时间 T 在各断面上是相同的，即斜管各纵断面上颗粒沉淀时间相同，$T_i = T$，代入式(7)并整理得：

$$\left(\frac{1}{2}a\cos\theta\right)T^2 + (u_{0i}\cos\theta)T + (y - r_i) = 0$$

上式对 T 求解：

$$T_{1,2} = \frac{-u_{0i} \pm \sqrt{u_{0i}^2 - 2a(y - r_i)\frac{1}{\cos\theta}}}{a} \quad (\theta \neq 90°)$$

不妨规定 u_{0i} 及 a 方向向下为正，又因 $T \geqslant 0$，故取：

$$T = \frac{-u_{0i} + \sqrt{u_{0i}^2 - 2a(y - r_i)\frac{1}{\cos\theta}}}{a} \quad (9)$$

将式(4)，式(5)，式(9)代入 $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt}\Big/\frac{dy}{dt}$ 可得：

$$dx = \text{tg}\theta dy - \frac{K(R^2 - y^2 - z_i^2)}{\cos\theta\sqrt{u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}}}dy$$

即

$$x = \int \text{tg}\theta dy + \int -\frac{K(R^2 - y^2 - z_i^2)}{\cos\theta\sqrt{u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}}}dy \quad (10)$$

因为 $\int \text{tg}\theta dy = \text{tg}\theta \cdot y + c_1$

$$\int \frac{K(R^2 - y^2 - z_i^2)}{\cos\theta\sqrt{u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}}}dy$$

$$= \frac{K(R^2 - z_i^2)}{\cos\theta}\int \frac{1}{\sqrt{u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}}}dy - \frac{K}{\cos\theta}\int \frac{y^2}{\sqrt{u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}}}dy$$

$$= -\frac{K(R^2 - z_i^2)}{a}\left[u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{Ky^2}{a}\left[u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\frac{K\cos\theta}{a^2}y\left[u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}\right]^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{15}\frac{K\cos^2\theta}{a^3}\left[u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}\right]^{\frac{5}{2}} + c_2$$

将上面各积分结果代入式(10)，令 $c = c_1 + c_2$，且 $r_i^2 = R^2 - z_i^2$：

所以
$$x = y\text{tg}\theta + \frac{Kr_i^2}{a}\left[u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{Ky^2}{a}\left[u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\frac{Ky\cos\theta}{a^2}\left[u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}\right]^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}\frac{K\cos^2\theta}{a^3}\left[u_{0i}^2 - \frac{2a(y - r_i)}{\cos\theta}\right]^{\frac{5}{2}} + c \quad (11)$$

以边界条件 $\begin{cases} x = 0 \\ y = r_i \end{cases}$ 代入式(11)得：

$$c = -r_i\text{tg}\theta + \frac{2}{3}\frac{Kr_i\cos\theta}{a^2}u_{0i}^3 + \frac{2}{15}\frac{K\cos^2\theta}{a^3}u_{0i}^5$$

又以另一边界条件 $\begin{cases} x = L_i \\ y = -r_i \end{cases}$ 及上式代入式(11)得：

$$L_i = -2r_i\text{tg}\theta + \frac{2}{3}\frac{Kr_i\cos\theta}{a^2}\left[\left(u_{0i}^2 + \frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{3}{2}} + u_{0i}^3\right] + \frac{2}{15}\frac{K\cos^2\theta}{a^3}\left[-\left(u_{0i}^2 + \frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{5}{2}} + u_{0i}^5\right]$$

又由水力学[4]，有 $K = \frac{2v_0}{R^2}$，其中 v_0 为圆管断面平均流速；且 $2r_i = d_i$，代入上式并整理之：

$$\frac{1}{v_0}\left(\frac{L_i}{d_i}\cos\theta + \sin\theta\right) = \frac{2}{3}\frac{\cos^2\theta}{a^2R^2}\left[\left(u_{0i}^2 + \frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{3}{2}} + u_{0i}^3\right] + \frac{2}{15}\frac{\cos^3\theta}{a^3R^2r_i}\left[-\left(u_{0i}^2 + \frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{5}{2}} + u_{0i}^5\right] \quad (12)$$

即

$$L_i = v_0\left\{\frac{4}{3}\frac{r_i\cos\theta}{a^2R^2}\left[\left(u_{0i}^2 + \frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{3}{2}} + u_{0i}^3\right] + \frac{4}{15}\frac{\cos^2\theta}{a^3R^2}\left[-\left(u_{0i}^2 + \frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{5}{2}} + u_{0i}^5\right]\right\} - 2r_i\text{tg}\theta \quad (13)$$

对于下向流情况，相当于以水平轴为基准，将斜管顺时针旋转 θ。故以 $-\theta$ 代入式(12)，式(13)即可得下向流斜管的水力计算式：

$$\frac{1}{v_0}\left(\frac{L_i}{d_i}\cos\theta - \sin\theta\right) = \frac{2}{3}\frac{\cos^2\theta}{a^2R^2}\left[\left(u_{0i}^2 + \frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{3}{2}} + u_{0i}^3\right]$$

$$+\frac{2}{15}\frac{\cos^3\theta}{a^3R^2r_i}\left[-\left(u_{0i}^2+\frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{5}{2}}+u_{0i}^5\right] \quad (14)$$

或

$$L_i=v_0\left\{\frac{4}{3}\frac{r_i\cos\theta}{a^2R^2}\left[\left(u_{0i}^2+\frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{3}{2}}+u_{0i}^3\right]\right.$$

$$\left.+\frac{4}{15}\frac{\cos^2\theta}{a^3R^2}\left[-\left(u_{0i}^2+\frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{5}{2}}+u_{0i}^5\right]\right\}+2r_i\mathrm{tg}\theta \quad (15)$$

2 水力计算公式的讨论

2.1 与现有水力计算公式的关系

对于 $z_i=0$ 的断面，有 $L_i=L$，$d_i=d$，$r_i=R=\frac{1}{2}d$，若令 $u_{0i}=0$ 代入式(13)，得：

$$L=\frac{16}{15}v_0\sqrt{\frac{2d}{a\cos\theta}}-d\cdot\mathrm{tg}\theta \quad (16)$$

这即为加速沉降法中未考虑初始沉速的上向流圆形斜管水力计算式[1]。

又由式(12)，有：

$$\frac{1}{v_0}\left(\frac{L_i}{d_i}\cos\theta+\sin\theta\right)$$

$$=\frac{1}{a^3}\left\{\frac{2}{3}\frac{\cos^2\theta}{R^2}a\left[\left(u_{0i}^2+\frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{3}{2}}+u_{0i}^3\right]\right.$$

$$\left.+\frac{2}{15}\frac{\cos^3\theta}{R^2r_i}\left[-\left(u_{0i}^2+\frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{5}{2}}+u_{0i}^5\right]\right\}$$

当 $a\to0$ 时，等式右边满足数学分析中 L′Hospital 法则[5]条件：

$$\frac{1}{v_0}\left(\frac{L_i}{d_i}\cos\theta+\sin\theta\right)$$

$$=\lim_{a\to0}\frac{1}{a^3}\left\{\frac{2}{3}\frac{\cos^2\theta}{R^2}a\left[\left(u_{0i}^2+\frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{3}{2}}+u_{0i}^3\right]\right.$$

$$\left.+\frac{2}{15}\frac{\cos^3\theta}{R^2r_i}\left[-\left(u_{0i}^2+\frac{4ar_i}{\cos\theta}\right)^{\frac{5}{2}}+u_{0i}^5\right]\right\}$$

$$=\frac{3}{4}\frac{r_i^2}{R^2}\frac{1}{u_{0i}}$$

即

$$\frac{u_{0i}}{v_0}\left(\frac{L_i}{d_i}\cos\theta+\sin\theta\right)=\frac{4}{3}\left(1-\frac{z_i^2}{R^2}\right) \quad (17)$$

上式为不考虑管内絮凝作用($a=0$)的任意纵断面上向流圆形斜管水力计算式。特别地，当 $z_i=0$ 时，$L_i=L$，$d_i=d$，有：

$$\frac{u_{0i}}{v_0}\left(\frac{L}{d}\cos\theta+\sin\theta\right)=\frac{4}{3} \quad (18)$$

这即为用‘特性参数法’推得的上向流圆型斜管水力计算式[1,3]。同样地，以 $-\theta$ 代入上述各式，可得相应的下向流公式，此处不再赘述。

2.2 上、下向流一般计算公式的关系

将式(15)－式(13)得：$L_{下}-L_{上}=4r_i\mathrm{tg}\theta$

这也即上、下向流一般计算公式的关系。在一般实际情况下，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，显然有 $L_{下}>L_{上}$；当 $\theta\to0$ 这即为多层多格沉淀池情况：$L_{下}=L_{上}$；当 $r_i\to0$(包括 $R\to0$ 或 $z_i\to R$)时，也有 $L_{下}=L_{上}$，这仅为一种极限情况；当 $\theta\to\frac{\pi}{2}$ 时，即相当于竖流式沉淀池情况，而此时有：$L_{下}-L_{上}\to\infty$。

2.3 斜管长度 L_i 与沉淀影响因素的关系

斜管长度 L_i 与其它沉淀影响因素的关系式为式(13)、式(15)，鉴于用解析方法分析的复杂性，本文采用计算机编程，对 $u_0=0.1\sim0.2$ mm/s(步长 0.01)及 $v_0=1\sim20$ mm/s(步长 1)范围，由给定的 a，R，θ 计算 L_i 值($r_i=R$ 断面)，并进行初步数值计算分析，发现：

(1)当 $\theta=45°$，$R=15$ mm 及 $a=0$，0.001，0.01，0.1 mm/s^2 时，与 v_0，u_0 相应的 L_i 值随 a 的增加而减少，但当 u_0 值大到一定时，则该趋势变缓。在 $u_0=0.1\sim2.0$ mm/s 范围，进一步比较 $a=0$ 与 $a=0.001$ mm/s^2 的情况：当 $u_0\geqslant1.0$ mm/s 时，$L_{a=0}-L_{a=0.001}\leqslant30$ mm，因此可认为此时由式(18)作为式(13)的简化式求得的 L($z=0$ 断面)不致引起较大的误差。

当 $\theta=60°$，$R=15$ mm 及 $a=0$，0.001，0.01，0.1 mm/s^2 时，可得类同的结论。在 $u_0=0.1\sim2.0$ mm/s 范围，当 $u_{0i}\geqslant1.0$ mm/s 时，$L_{a=0}-L_{a=0.001}\leqslant50$ mm。

(2)当 $\theta=45°$，$a=0.01$ mm/s^2 时，对比 $R=12.5$，15，20，40 mm 之相应于 u_{0i} 及 v_0 的 L_i 值，易知 L_i 值随 R 的增大而增大，这与许多理论及试验结果一致[1,6]；而当 $\theta=60°$，$a=0.01$ mm/s^2，$v_0=1$ mm/s 及 $u_0=0.1\sim2.0$ mm/s 时，则有 $L_{R=20}>L_{R=40}$，与 $\theta=45°$ 时的结论相反；但在其它情况下，却与 $\theta=45°$ 时的情况相似。

(3)对于 $a=0.01\ \mathrm{mm/s^2}$，$u_0=0.1\sim2.0\ \mathrm{mm/s}$，$v_0=1\sim20\ \mathrm{mm/s}$，$R=40\ \mathrm{mm}$ 时，对比 $\theta=0°$，30°，45°，50°，60°，85°的 L_i 值，及 $R=15\ \mathrm{mm}$ 时，$\theta=0°$，45°，60°时的 L_i 值，发现不存在随 θ 的增加而 L_i 单调增加或减少的规律。说明 θ 对 L_i 的影响较为复杂，值得重视。许多试验结果[1,7]也证实了这一点。

综上所述，式(16)，式(17)，式(18)均为式(13)的特例。由于式(16)未考虑初始沉速 u_{0i}，这显然是不合理的；而式(17)，式(18)未考虑加速度的影响($a=0$)，这与斜管沉淀池中实际存在的由絮凝作用而导致的颗粒加速下沉不相吻合，但以式(18)作为式(13)的简化，在 $a<0.01\ \mathrm{mm/s}$ 时，求得的 L 值与式(13)求得的 L 值($r_i=R$ 断面上)相近，故在实际设计工作中由于简单易算而有其实用价值。式(13)综合考虑了斜管沉淀中各主要影响因素，对于进一步进行斜管沉淀的研究提供了理论上的参考依据。但由于对 a 的探讨目前仅限于理论上，因此还需通过试验进一步验证。

上述各式在推导时均未考虑斜管内水流的紊动等不利因素，故实际设计采用的 L 值应大于理论计算值。

对于下向流公式(15)也可进行同样讨论。

由于上面我们讨论的是圆形断面斜管情况，对于具有正多边形横截面的斜管，由于其流速分布已不呈旋转抛物面而不能直接应用式(13)，式(15)，但我们不妨近似地等效为正多边形外接圆或等截面积圆管来计算。

参考文献

1 上海市政工程设计院. 斜板斜管沉淀池. 北京：中国建筑工业出版社，1978

2 王样权. 斜板、斜管的水力计算与选择. 给水排水，1985，11(5)：15～21

3 Yao，K M. Theoretical study of high-rate sedimentation. Water Pullution Control Federation，1970，42(2)：218

4 西南交通大学，哈尔滨建工学院. 水力学. 北京：人民教育出版社，1979

5 赵慈庚. 一元函数微分学，上海：上海科学技术出版社，1980

6 Hansen S P，Culp G L. Applyfing shallow depth sedimentation theory. Amer. Water Works Asson，1967(9)：1 134

7 Culp G，et al. High-rate sedimentation in water treatment works. Amer. Water Works Asson. 1968，(6)：681

○作者通讯处：410082 湖南大学土木工程学院水工程与科学系

电话：(0731)8822564

E-mail：szhou@public.cs.hn.cn

秦成生　421000 湖南衡阳南华大学给水排水教研室

收稿日期：2001-2-6